위상수학 2학기

김상배 교수 : xxx@hnu.kr
http://sbk.hnu.kr/Lectures
010-xxxx-7867
문자메세지, 카톡(공부내용 질문)

교과서 : Schaum's Outlines
일반위상수학, 이장우역, 경문사

제9장 가산성

가산집합(from 집합론)

집합 A 는 가산집합이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ **집합 A 로부터 자연수집합 $\mathbb{N}$ 으로 가는 1-1 함수(단사함수)가 존재한다.**

[예제]

(1) 모든 유한집합은 가산집합이다.

(2) 모든 수열의 치역은 가산집합이다.

(3) 정수집합은 가산집합이다.

(4) 유리수집합은 가산집합이다.

(5) 실수구간 $(0,1)$ 은 비가산집합이다.

(6) 실수집합은 비가산집합이다.

가산족 (from 집합론)

집합족 $\mathscr{B}$ 는 가산족이다

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ ∃ **가산집합** I **:** $\mathscr{B} = \{A_i \mid i \in I\}$

제1가산공간

위상공간 X는 제1가산공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $\forall p \in X, \exists \mathscr{B}_p$: **가산국소기저 of** p

제2가산공간

위상공간 $(X, \Im)$는 제2가산공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ ∃ $\mathscr{B}$ **: 가산기저 of 위상** $\Im$

[예제1.1] 모든 거리공간은 제1가산공간이다.

(풀이) 거리공간의 한 점 p에 대하여 중심을 p에 둔 열린구들의 집합

$\left\{ S(p,1), S(p,\dfrac{1}{2}), S(p,\dfrac{1}{3}), \cdots \right\}$ **은 가산집합이고, 또 점 p의**

국소기저가 된다.

[예제1.2] 모든 이산공간은 제1가산공간이다.

(풀이) 이산공간 X의 모든 집합은 개집합이므로, 임의의 한 점 p 에 대하여, 한 점 집합 $\{p\}$는 개집합이다. 점 p를 포함한 임의의 개집합 G은 점 p를 포함하므로 집합 $\mathscr{B}_p = \{\{p\}\}$는 점 p의 국소기저가 된다.

집합 $\mathscr{B}_p$는 유한집합이므로 가산집합이 된다. 즉 이산공간 X의 가산국소기저가 존재하므로 X는 제1가산공간이다.

[문제2, p249]

점 p의 가산국소기저 $\mathcal{C}_p = \{G_1, G_2, G_{3,} \cdots\}$가 존재하면

점 p의 축소국소기저 $\mathscr{B}_p = \{B_1, B_2, B_{3,} \cdots\}$: ($\forall\, n \in \mathrm{N}, B_n \supset B_{n+1}$)

가 존재한다.

(증명)

$B_1 = G_1$

$B_2 = G_1 \cap G_2$

$B_3 = G_1 \cap G_2 \cap G_3$

$\cdots$

로 놓으면 당연히 $\forall\, n \in \mathrm{N}, B_n \supset B_{n+1}$ **이 되고,**

$p \in {}^{\forall} G$ **개집합,** $\exists\, n_0 \in \mathrm{N}, \mathrm{p} \in \mathrm{G}_{\mathrm{n}_0} \subset \mathrm{G}$

이므로 $\exists\, n_0 \in \mathrm{N}, p \in B_{n_0} \subset G_{n_0} \subset G$ **이다.**

그러므로 $\mathscr{B}_p = \{B_1, B_2, B_{3,} \cdots\}$는 축소국소기저이다. ■

[문제3, p249]

$\mathscr{B}_p = \{B_1, B_2, B_{3,} \cdots\}$**가 점** p**의 축소국소기저이고,** $\forall n \in \mathrm{N}, a_n \in B_n$

이면 $a_n \to p$ **이다.**

(증명)

$p \in {}^{\forall} G$ **개집합,** $\mathscr{B}_p$**이 국소기저이므로,**

$\exists n_0 \in \mathrm{N}, p \in B_{n_0} \subset G$ **이다.**

그런데 $a_{n_0} \in B_{n_0}$ **이고, 축소국소기저이므로 (** $n \geq n_0 \Rightarrow B_n \subset B_{n_0}$**)**

이다, 그런데 $a_n \in B_n$ **이므로 (** $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in B_{n_0}$**) 이다.**

여기서 $B_{n_0} \subset G$ **이므로 (** $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in G$ **) 이다.**

따라서 $p \in {}^{\forall} G$ **개집합, (** $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in G$ **) 이다.**

즉 $a_n \to p$ **이다.** ■

[정리 9.1] X가 제1가산 공간인 함수 $f:X\rightarrow Y$ 에 대하여,

f 가 점 p에서 연속 $\Leftrightarrow$ f 가 점 p에서 점열연속

(증명)

참고 : 함수 $f:X\rightarrow Y$ 은 점 p에서 점열연속이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ (점열$a_n\rightarrow a$ $\Rightarrow$ 점열$f(a_n)\rightarrow f(a)$)

($\Longrightarrow$)

1학기때 "[명제7.6] 모든 연속함수는 점열연속이다."에서 증명함.

($\Longleftarrow$)

$\mathscr{B}_p=\{B_1, B_2, B_3, \cdots\}$를 점 p의 축소국소기저($B_n\supset B_{n+1}$)라 하자.

만약 f 가 점 p에서 연속이 아니라고 가정하면,

$\exists H$ 개집합 of Y : (1) $f(p)\in H$

(2) $\forall n\in\mathrm{N}$, $p\in B_n\not\subset f^{-1}[H]$

$\Rightarrow \forall n \in \mathrm{N}$, $\exists a_n \in B_n$: $a_n \notin f^{-1}[H]$

$\Rightarrow \forall n \in \mathrm{N}$, $\exists a_n \in B_n$: $f(a_n) \notin H$

$\mathscr{B}_p$ 는 축소국소기저이므로, by (#3 p249)에 의하여 $a_n \to p$ 이다. --[1]

그런데 $f(p) \in H$: 개집합, $\forall n \in \mathrm{N}$, $f(a_n) \notin H$ 이므로

$f(a_n) \not\to f(p)$ 이다. --[2]

그러므로 [1],[2]에 의하여 점열연속이 아니다. ■

[예제2.1] 보통위상을 가진 실수공간 $(\mathrm{R}, \mathcal{U})$ 은 제2가산공간이다.

(풀이) $\mathscr{B} = \{(q,r) \mid q,r \in \mathrm{Q}\} \approx \mathrm{Q} \times \mathrm{Q} \approx \mathrm{N}$ 이므로 $\mathscr{B}$ 는 가산족이다.

$\mathscr{B}$ 가 실수공간의 기저가 됨을 보이자. $^\forall G \in \mathcal{U}$, 개구간들이

$\mathcal{U}$ 의 기저이므로, $^\forall x \in G$, $\exists$ 개구간 (a,b): $x \in (a,b) \subset G$

여기서 $\exists q_x, r_x \in \mathrm{Q}$: $x \in (q_x, r_x) \subset (a,b) \subset G$ 임을 알 수 있다.

따라서 $G = \cup_{x \in G} (q_x, r_x)$, 여기서 $(q_x, r_x) \in \mathscr{B}$ 이다. ■

[예제2.2] 이산위상을 가진 실수집합 위에 위상공간 $(\mathbb{R},\mathcal{D})$의 기저가 되기 위해서는 단일원 집합을 모두 포함해야 한다. 따라서 그 기저는 가산집합이 아니다. 그러므로 $(\mathbb{R},\mathcal{D})$는 제2가산공간이 안된다.

[명제9.2] 모든 제2가산공간은 제1가산공간이 된다.

(증명)

$\mathscr{B}$를 제2가산공간 X의 가산기저라고 하고, $p \in X$라고 하자.

$\mathscr{B}_p = \{B \in \mathscr{B} \mid p \in B\}$는 $\mathscr{B}$의 부분집합이므로 가산집합이 된다.

또한 $p \in {}^{\forall} G$ 개집합에 대하여,

$\mathscr{B}$가 기저이므로, $\exists B \in \mathscr{B} : p \in B \subset G$ 이다.

따라서 $B \in \mathscr{B}_p$ 이다. 그러므로 $\mathscr{B}_p$는 p의 국소기저가 된다.

따라서 X는 제1가산공간이 된다. ■

[참고] 예제1.2와 예제2.2.에 의하여 위 [명제9-2]의 역은 성립하지 않는다.

개피복과 부분피복

1) 집합족 $\mathcal{G} = \{A_i\}_{i \in I}$는 집합 A의 **피복**이다.

$$\Leftrightarrow A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

2) 집합족 $\mathcal{G} = \{A_i\}_{i \in I}$는 집합 A의 **개피복**이다.

$\Leftrightarrow A \subset \bigcup_{i \in I} A_i \ \wedge$ ($\forall i \in I$, A_i : 개집합)

3) $\mathcal{C}$는 $\mathcal{G}$의 **부분피복**이다.

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$와 $\mathcal{G}$ 모두 어떤 집합의 피복이고, $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ 이다.

[정리9.3] by 린델레프

제2가산공간에 있는 어떤 집합의 개피복은 가산 부분피복을 갖는다.

(증명)

$\mathscr{B}$를 제2가산공간 X의 가산기저라고 하고, $\mathcal{G}$를 집합 A의 개피복이라고 하자. 즉 $A \subset \cup \mathcal{G}$ 이다. 그러므로 $\forall p \in A,\ p \in {}^{\exists} G_p \in \mathcal{G}$ 이다. G_p는 개집합이고, $\mathscr{B}$가 X의 기저이므로,

$\exists B_p \in \mathscr{B}$: $p \in B_p \subset G_p$ 이다. 여기서 $A \subset \cup \{B_p \mid p \in A\}$ 이다. $\{B_p \mid p \in A\} \subset \mathscr{B}$ 이므로 $\{B_p \mid p \in A\}$는 가산집합이다. 따라서

$$\{B_p \mid p \in A\} = \{B_{p_n} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

로 놓을 수 있다. 그런데 $B_{p_n} \subset G_{p_n}$ 이므로

$$A \subset \cup \{B_p \mid p \in A\} = \cup \{B_{p_n} \mid n \in \mathbf{N}\} \subset \cup \{G_{p_n} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

그러므로 $\{G_{p_n} \mid n \in \mathbf{N}\}$는 A의 가산 부분피복이다. ■

[정리9.4] by 린델레프

제2가산공간의 모든 기저에 대하여, 그 기저의 가산부분집합인 기저를 만들 수 있다.

(증명)

X의 가산기저를 $\mathscr{B} = \{B_n \mid n \in \mathrm{N}\}$라고 하고, $\mathcal{G}$를 X의 임의의 기저라고 하자. $\mathcal{G}$도 기저이므로 $\mathscr{B}$안의 개집합 B_n을 $\mathcal{G}$의 원소의 합집합으로 표시할 수 있다. 즉 $\forall n \in \mathrm{N}, \exists \mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}$: $\cup \{A \mid A \in \mathcal{G}_n\} = B_n$이다. $\mathcal{G}_n$는 B_n의 개피복이므로, by [정리9-3] , $\exists$ 가산개피복 $\mathcal{G}_n^* \subset \mathcal{G}_n$: $B_n \subset \cup \{A \mid A \in \mathcal{G}_n^*\}$이다. $\cup \{A \mid A \in \mathcal{G}_n^*\} \subset \cup \{A \mid A \in \mathcal{G}_n\}$이므로 $B_n \subset \cup \{A|A \in \mathcal{G}_n^*\} \subset \cup \{A|A \in \mathcal{G}_n\} = B_n$, 즉 $B_n = \cup \{A|A \in \mathcal{G}_n^*\}$이다. $\mathscr{B} = \{B_n \mid n \in \mathrm{N}\}$가 기저이므로 $\mathcal{G}^* = \bigcup_{n \in \mathrm{N}} \mathcal{G}_n^*$ 도 기저가 되고 $\mathcal{G}^*$는 가산집합 $\mathcal{G}_n^*$들의 N개의 합집합이므로 가산집합이다. ■

가분공간

위상공간 X는 가분공간 (또는 분리가능공간)이다.

정의
$\Leftrightarrow$ **X가 가산 조밀부분집합을 포함한다.**

$\Leftrightarrow$ **∃ 가산집합 A : $\overline{A} = X$**

[예제 3.1] 보통위상을 갖는 실수공간 $\mathbb{R}$은 유리수집합 $\mathbb{Q}$이 가산이고, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ 이므로 $\mathbb{R}$은 가분공간이다.

[예제 3.2] 이산위상 $\mathcal{D}$을 갖는 실수집합 $\mathbb{R}$ 위의 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$에서 모든 집합이 개집합임과 동시에 폐집합이라서, 모든 부분집합 A 대하여 $\overline{A} = A$ 이다. 그러므로 A가 조밀부분집합, 즉 $\overline{A} = \mathbb{R}$ 이라면 $A = \overline{A} = \mathbb{R}$이 되어 $A = \mathbb{R}$이다. $\mathbb{R}$은 비가산이므로 A도 비가산이고, 따라서 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$는 가분공간이 될 수 없다.

[명제 9.5] 모든 제2가산공간은 가분공간이다.

(증명)

X가 가산기저 $\mathscr{B}=\{B_n \mid n\in \mathrm{N}\}$ $(B_n \neq \phi)$를 갖는다고 하자. 그럼 $\forall n\in \mathrm{N},\ \exists b_n\in B_n$이다. 여기서 $B=\{b_n \mid n\in \mathrm{N}\}$는 가산집합이다.

$\overline{B}=X$임을 보이자. 우선 $B^c\subset B'$을 보이기 위하여 $p\in B^c$ 라고 하자. $p\in {}^\forall G$:개집합, $\mathscr{B}$이 기저이므로 $\exists B_{n_p}$: $p\in B_{n_p}\subset G$ 이다. $n_p\in \mathrm{N}$ 이므로 $b_{n_p}\in B$이지만 $p\in B^c$ 이므로 $b_{n_p}\neq p$이다.

또한 $b_{n_p}\in B_{n_p}$ 이므로 $b_{n_p}\in ((G\setminus \{p\})\cap B)\neq \phi$ 이다. 따라서 $p\in B'$ 이다. 그러므로 $B^c\subset B' \Rightarrow B\cup B^c\subset B\cup B'$

$$\Rightarrow X=B\cup B^c\subset B\cup B'=\overline{B}$$

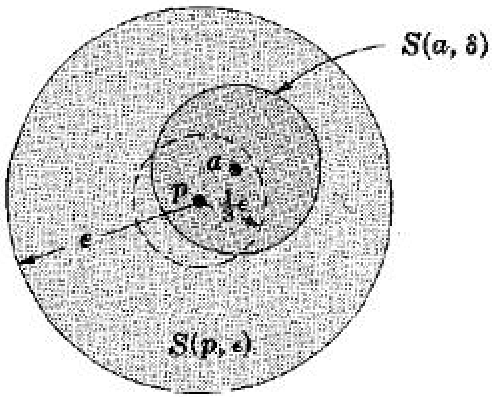
$$\Rightarrow X=\overline{B}\quad \text{(이유 : } \overline{B}\subset X)$$

결국 B는 X의 가산인 조밀부분집합이다. ■

[문제 15, p253] 거리공간 X에서의 열린구 $S(p,\varepsilon)$ 안의 점 a에 대하여

$d(p,a) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ **이고,** $\dfrac{\varepsilon}{3} < \delta < \dfrac{2\varepsilon}{3}$ **이면,** $p \in S(a,\delta) \subset S(p,\varepsilon)$ **이다.**

(증명)



1) $d(p,a) < \dfrac{\varepsilon}{3} < \delta$ **이므로** $p \in S(a,\delta)$ **이다.**

2) $x \in S(a,\delta) \Rightarrow d(a,x) < \delta$

$$\Rightarrow d(p,x) \le d(p,a) + d(a,x)$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3} + \delta < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow x \in S(p,\varepsilon)$$

따라서 $S(a,\delta) \subset S(p,\varepsilon)$ ■

[정리 9.6] 거리공간이고 가분공간이면 제2가산공간이 된다.

(증명)

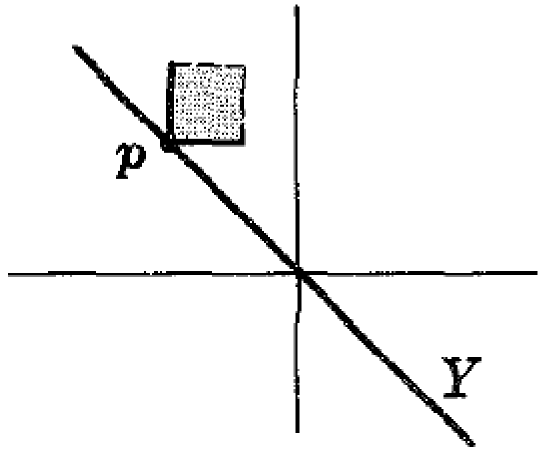
X**가 가분공간이면** $\exists$ **가산집합** $A \subset X$ **:** $\overline{A} = X$ **이다. 그러므로** $\mathscr{B} = \{S(a,\delta) \mid a \in A, \delta \in \mathbb{Q}\}$ **는 가산집합이다. 여기서** $\mathscr{B}$**가 기저가 됨을 보이자.** $\forall p \in {}^{\forall}G$ **개집합에 대하여,** X**는 거리공간이므로,** $\exists S(p,\varepsilon) \subset G$ **이다.** $\overline{A} = X$ **이므로** $\exists a_p \in A$**:** $d(a_p,p) < \dfrac{\varepsilon}{3}$

$\dfrac{\varepsilon}{3} < \delta_p < \dfrac{2\varepsilon}{3}$ **이 되는 유리수** δ_p**를 잡으면, [문제 15, p253]에 의해,** $p \in S(a_p,\delta_p) \subset S(p,\varepsilon)$**이 된다.** $S(a_p,\delta_p) \in \mathscr{B}$**이고** $S(p,\varepsilon) \subset G$ **이므로,** $\forall p \in {}^{\forall}G$ **,** $\exists S(a_p,\delta_p) \in \mathscr{B}$ **:** $p \in S(p,\varepsilon) \subset G$ **이다.**

그러므로 $\mathscr{B}$**는 기저가 된다. 즉 가산기저이다.** ■

유전적 성질

위상공간 X가 성질 P를 가질 때, 그 부분공간도 모두 성질 P를 가지면 성질 P를 유전적 성질이라고 한다.



[예제] 제1가산, 제2가산은 유전적 성질이다.
하지만, 가분공간의 부분공간이 반드시 가분이 되는 것은 아니다.
즉 가분성은 유전적 성질이 아니다.

[문제 13-14, p252]

$\mathfrak{I}$를 직사각형 $[a,b)\times[c,d)$들에 의해 생성된 평면 R^2상의 위상이라 하자. 모든 직사각형이 유리수 점 (p,q)를 포함하기 때문에, $A=\mathrm{Q}\times\mathrm{Q}$는 R^2에서 조밀하다. A는 가산집합이므로 $(\mathrm{R}^2,\mathfrak{I})$는 가분공간이다. 그런데 직선 $Y=\{(x,y)\mid x+y=0\}$는 이산위상이 되므로 가분공간이 아니다.

[참고] 가분성은 위상적 성질이다.

(증명)

X, Y **위상동형**

$\Rightarrow \exists$ 전단사함수 $f : X \to Y$

X **: 가분공간**

$\Rightarrow \exists$ 가산집합 $A \subset X$: $\overline{A} = X$

$\Rightarrow f(\overline{A}) = f(X)$

$\Rightarrow f(\overline{A}) = Y$

$\Rightarrow Y = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ **by 연속함수의 임의밀착성.**

$\Rightarrow Y = \overline{f(A)}$

$\Rightarrow Y$ **: 가분공간 since** $f(A) \cong A$ **: 가산집합**

그러므로 가분성은 위상적 성질이다. ■

제10장 분리공리

T_1공간

위상공간 X는 T_1공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $^\forall a \neq {}^\forall b \in X$, ∃ **개집합** G, H : $a \in G,\ b \in H,\ a \notin H,\ b \notin G$

T_2공간(=하우스도르프 공간)(Hausdorff Space)

위상공간 X는 T_2공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $^\forall a \neq {}^\forall b \in X$, ∃ **개집합** G, H : $a \in G,\ b \in H,\ G \cap H = \phi$

정칙공간

위상공간 X는 정칙공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $p \notin {}^\forall F$ **폐집합**, ∃ **개집합** G, H : ($p \in G,\ F \subset H,\ G \cap H = \phi$)

T_3공간

위상공간 X는 T_3공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ **위상공간 X가 정칙공간이고, 또한 T_1공간이다.**

정규공간

위상공간 X는 정규공간이다.

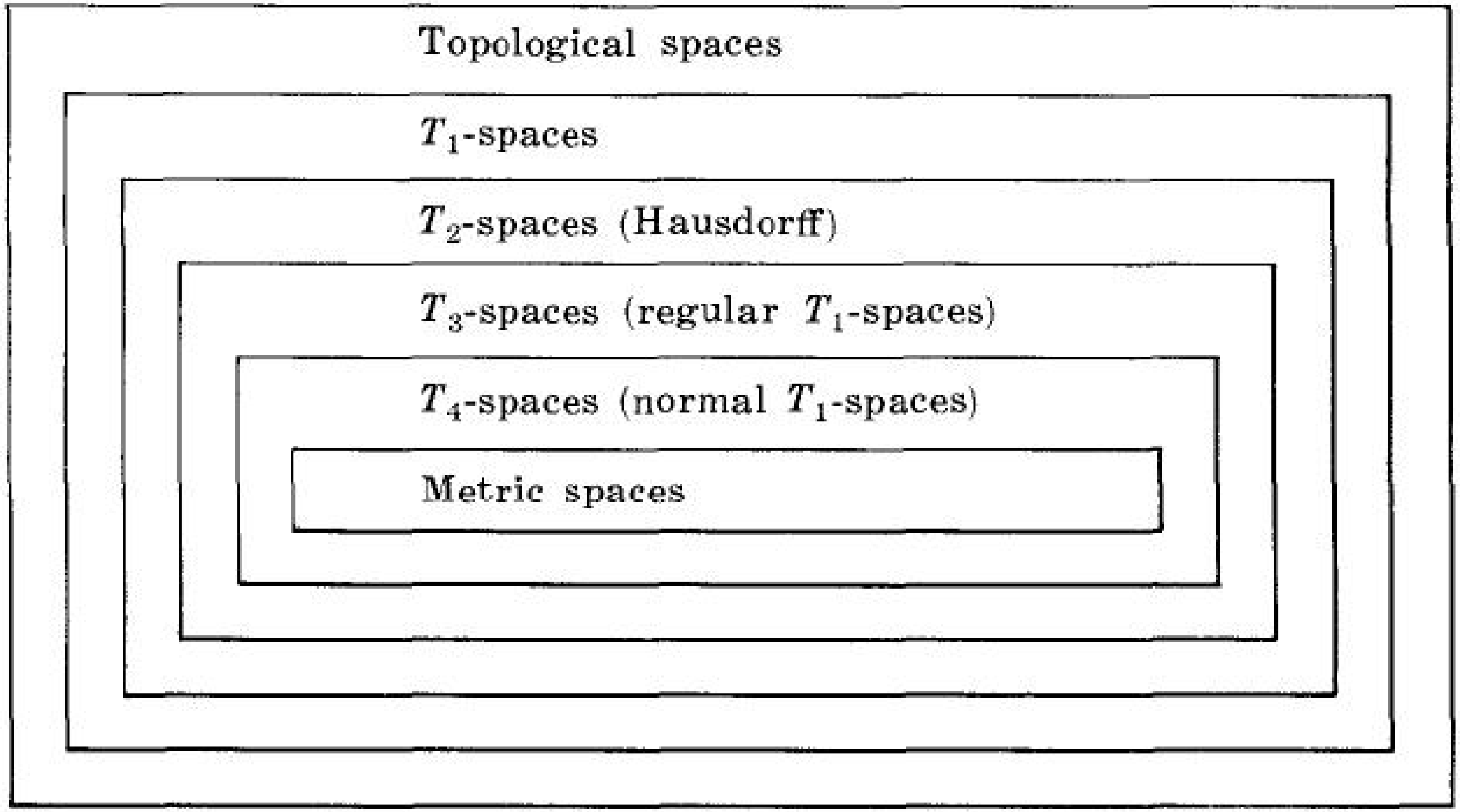
$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \forall F_1, F_2 (F_1 \cap F_2 = \phi)$ **폐집합,**

$\exists$ **개집합** G, H **: (** $F_1 \subset G,\ F_2 \subset H,\ G \cap H = \phi$ **)**

T_4공간

위상공간 X는 T_4공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ **위상공간 X가 정규공간이고, 또한 T_1공간이다.**


Topological spaces
T_1-spaces
T_2-spaces (Hausdorff)
T_3-spaces (regular T_1-spaces)
T_4-spaces (normal T_1-spaces)
Metric spaces

[정리 10.1] X는 T_1 공간이다.

$\Leftrightarrow \quad \forall p \in X, \ \{p\}$가 폐집합이다.

(증명)

($\Rightarrow$) $x \in \{p\}^c \Rightarrow x \neq p$

$\Rightarrow \exists$ 개집합 G, H : $x \in G, p \in H, p \notin G, \ x \notin H$

$\Rightarrow \exists$ 개집합 G_x : $x \in G_x, \ \{p\} \subset G_x^c$

$\Rightarrow \exists$ 개집합 G_x : $x \in G_x, \ G_x \subset \{p\}^c$

그러므로 $\{p\}^c = \cup \left\{ G_x \mid x \in \{p\}^c \right\}$: 개집합들의 합집합

$\Rightarrow \ \{p\}^c$: 개집합

$\Rightarrow \ \{p\}$: 폐집합

($\Leftarrow$) ${}^{\forall} a \neq {}^{\forall} b \in X$에 대하여,

$\{a\}, \{b\}$는 폐집합

$\Longrightarrow \quad G=\{b\}^c, H=\{a\}^c$ 는 개집합, 또한 $b\notin G,\ a\notin H$

$a\neq b \ \Longrightarrow \ a\in G,\ b\in H$ ■

[따름정리 10.2] $(X,\Im)$는 T_1 공간이다.

$\Leftrightarrow$ $\Im$는 X위의 여유한위상을 포함한다.

(증명)

$\Im$가 T_1위상

$\Leftrightarrow$ 모든 단일원집합이 폐집합이다. ($\because$ 정리10.1)

$\Leftrightarrow$ $\forall$유한집합G가 폐집합 ($\because$ G:유한개의 단일원집합들의 합집합)

$\Leftrightarrow$ $\forall$유한집합의 여집합은 개집합이다.

$\Leftrightarrow$ 여유한위상을 포함한다. ■

[예제 1.1] 모든 거리공간은 T_1공간이다. 왜냐하면 거리공간에서 모든 유한집합은 폐집합이기 때문이다.

[예제 1.2] $X=\{a,b\}$, $\mathfrak{I}=\{X,\phi,\{a\}\}$ **로 주어진 위상공간** $(X,\mathfrak{I})$ **은** T_1 **공간이 아니다. 왜냐하면 단일원 집합** $\{a\}$ **가 폐집합이 아니기 때문이다.**

[예제 1.3] 여유한위상은 T_1 **위상이 되게 하는 위상중에서 가장 거친 위상이다. 따라서 여유한위상을** T_1-**위상이라고도 부른다.**

T_2공간(=하우스도르프 공간)(Hausdorff Space)

위상공간 X**는** T_2**공간이다.**

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $^{\forall}a \neq {}^{\forall}b \in X$ **,** $\exists$ **개집합** G,H **:** $a \in G,\ b \in H,\ G \cap H = \phi$

[정리10.3] 모든 거리공간은 T_2**공간이다.**

(증명) X**를 거리공간이라 하자**

$a,b \in X(a \neq b)$

$\Rightarrow\ d(a,b) = \varepsilon > 0$

$\Rightarrow\ \exists$ **열린구** $G = S(a, \varepsilon/3),\ H = S(b, \varepsilon/3)$

여기에서 $a \in G,\ b \in H$ **이고** $G \cap H = \phi$ **이다.** ■

[예제2.2] 실수집합 위의 여유한위상공간 $(\mathbb{R}, \mathscr{F})$ **은** T_2**가 아니다.**

(증명) G, H **가** $\mathscr{F}$**-개집합(**$G \neq \phi,\ H \neq \phi$**)**

$\Rightarrow\ G^c, H^c$ **은 유한집합이다.**

$\Rightarrow\ G, H$ **은 무한집합이다.** $\overset{(*)}{\Rightarrow}\ G \cap H \neq \phi$

여기서 $(*)$ **: (**$G \cap H = \phi \Rightarrow G \subset H^c$

$\Rightarrow$ **무한집합** $\subset$ **유한집합 !!)** ■

[정리10.4] T_2**공간에서 수렴열은 유일한 극한을 갖는다.**

(증명)

점열 $< a_n >$ 이 유일한 극한을 갖지 않는다

$\Rightarrow \ \exists\, a, b\,(a \neq b)$: $a_n \to a$, $a_n \to b$

$\Rightarrow \ \exists\, G, H$ 개집합 : $a \in G,\ b \in H,\ G \cap H = \phi$ by (T_2)

$\Rightarrow \ \exists\, n_0$: ($n > n_0 \Rightarrow a_n \in G$) by $a_n \to a$

$\exists\, m_0$: ($n > m_0 \Rightarrow a_n \in H$) by $a_n \to b$

만약 $n = \max(n_0, m_0) + 1$ 이라면

$a_n \in G \cap H$ 이다. 이것은 $G \cap H = \phi$ 에 모순이다.

따라서 점열 $< a_n >$ 은 유일한 극한을 가져야 한다. ■

[정리10.5] 위상공간 X 가 제1가산공간이면,

X 가 T_2 공간 $\Leftrightarrow$ $\forall$ 수렴열이 유일한 극한을 갖는다.

(증명)

($\Longrightarrow$) by 정리10.4

($\Longleftarrow$) 만약 X가 T_2공간이 아니라면, $\exists\, a,b\in X(a\neq b)$:

$a\in{}^{\forall}G$ 개집합, $b\in{}^{\forall}H$ 개집합, $G\cap H\neq\phi$이다. --(1)

X가 제1가산공간이므로, a의 가산축소국소기저 $\{G_n\}$와

b의 가산축소국소기저 $\{H_n\}$가 존재한다. 그런데 by(1),

$G_n\cap H_n\neq\phi$이다. 그러므로 $\exists\, a_n\in G_n\cap H_n$이다.

$\{G_n\}$와 $\{H_n\}$가 가산축소국소기저이므로 $a_n\to a,\ a_n\to b$ 이다.

$a\neq b$ 이므로 수렴열 $< a_n >$ 은 유일한 극한을 갖지 못한다. ■

정칙공간

위상공간 X는 정칙공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $p\notin{}^{\forall}F$ 폐집합, $\exists$ 개집합 G,H : ($p\in G,\ F\subset H,\ G\cap H=\phi$)

T_3공간

위상공간 X는 T_3공간이다.

정의

$\Leftrightarrow$ **위상공간 X가 정칙공간이고, 또한 T_1공간이다.**

[예제 3.1] 집합 $X=\{a,b,c\}, \Im=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\}$ 로 주어진 위상공간 $(X,\Im)$에서, 폐집합들은 $X,\phi,\{a\},\{b,c\}$ 이어서 $(X,\Im)$은 정칙공간이다. 그런데 집합 $\{b\}$는 유한집합인데 폐집합이 아니다. 그러므로 정리10.1 에 의하여 $(X,\Im)$은 T_1공간이 아니다.

[예제 3.2] 모든 T_3공간은 T_2공간이다.

(증명) X를 T_3공간이라고 하자.

$a,b \in X (a \neq b)$

$\Rightarrow$ **1)** $F=\{b\}$ **는 폐집합 ($\because$ X는 T_1)**

2) $a \not\in F$ ($\because a \neq b$)

$\Rightarrow$ $\exists$ **개집합** G, H **:** ($a \in G,\ F \subset H,\ G \cap H = \phi$)

$\Rightarrow$ $\exists$ **개집합** G, H **:** ($a \in G,\ b \in H,\ G \cap H = \phi$)

그러므로 X **를** T_2 **공간이다.** ■

[숙제] 다음을 증명하여라.

위상공간 X**는 정칙공간**

$\Leftrightarrow$ $^{\forall}p \in {}^{\forall}H$ **개집합,** $\exists G$ **개집합 :** $p \in G \subset \overline{G} \subset H$

정규공간

위상공간 X**는 정규공간이다.**

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \forall F_1, F_2 (F_1 \cap F_2 = \phi) \text{ 폐집합,}$$

$\exists$ **개집합** G, H **:** ($F_1 \subset G,\ F_2 \subset H,\ G \cap H = \phi$)

T_4공간

위상공간 X는 T_4공간이다.

정의

$\Leftrightarrow$ **위상공간 X가 정규공간이고, 또한 T_1공간이다.**

[정리 10.6] 위상공간 X는 정규공간

$\Leftrightarrow$ $^{\forall}F$ **폐집합** $\subset$ $^{\forall}H$ **개집합,** $\exists G$ **개집합 :** $F \subset G \subset \overline{G} \subset H$

(증명)

($\Rightarrow$ **)** F **폐집합** $\subset H$ **개집합**

$\Rightarrow F$ **폐집합 ,** H^c **폐집합 ,** $F \cap H^c = \phi$

$\Rightarrow$ $\exists G, K$ **개집합 : (**$F \subset G, H^c \subset K,$ $G \cap K = \phi$ **) by** X**:정규**

$\Rightarrow$ $F \subset G,$ K^c**는 폐집합,** $G \subset K^c$ **,** $K^c \subset H$

$\Rightarrow$ $F \subset G,$ $\overline{G} \subset K^c$ **,** $K^c \subset H$

$\Rightarrow$ $F \subset G \subset \overline{G} \subset H$

한남대학교 수학과 김상배 교수

($\Leftarrow$) $F_{1,}F_2(F_1 \cap F_2 = \phi)$ 폐집합,

$\Rightarrow$ 폐집합 $F_1 \subset F_2^c$ 개집합

$\Rightarrow$ $\exists\, G$ 개집합 : $F_1 \subset G \subset \overline{G} \subset F_2^c$ by 가정

$\Rightarrow$ $F_1 \subset G$, $F_2 \subset \overline{G}^{\,c}$

$H = \overline{G}^{\,c}$ 로 놓으면 $F_2 \subset H$ 개집합 이고,

$$G \subset \overline{G} \Rightarrow \overline{G}^{\,c} \subset G^c \Rightarrow H \subset G^c \Rightarrow G \cap H = \phi$$

그러므로 $F_1 \subset G$개집합 , $F_2 \subset H$ 개집합, $G \cap H = \phi$ ■

[예제 4.1] 모든 거리공간은 정리8.8에 의하여 정규공간이다.

[예제 4.2] 정규공간이 T_1 공간이 아닐 수 있다.

(예) $X = \{a,b,c\}$, $\mathfrak{I} = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$로 주어진 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$을 생각하여 보자. 폐집합은 $X, \phi, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}$ 이라서

서로 소인 폐집합들 F_1, F_2 중에 적어도 하나, 예를 들어 F_1은 ϕ이어야 한다. 그럼 $F_1 \subset \phi, F_2 \subset X,\ \phi \cap X = \phi$ 가 되어 $(X, \Im)$은 정규공간이다. 하지만 단일원 집합 $\{a\}$는 폐집합이 아니라서, $(X, \Im)$은 T_1공간이 아니다. ■

[예제 4.3] 모든 T_4공간은 T_3공간이다.

(증명) $p \notin F$ 폐집합 이라하자.

$\Longrightarrow$ $\{p\} \cap F = \phi$, $\{p\}$는 폐집합이다. by T_1공간

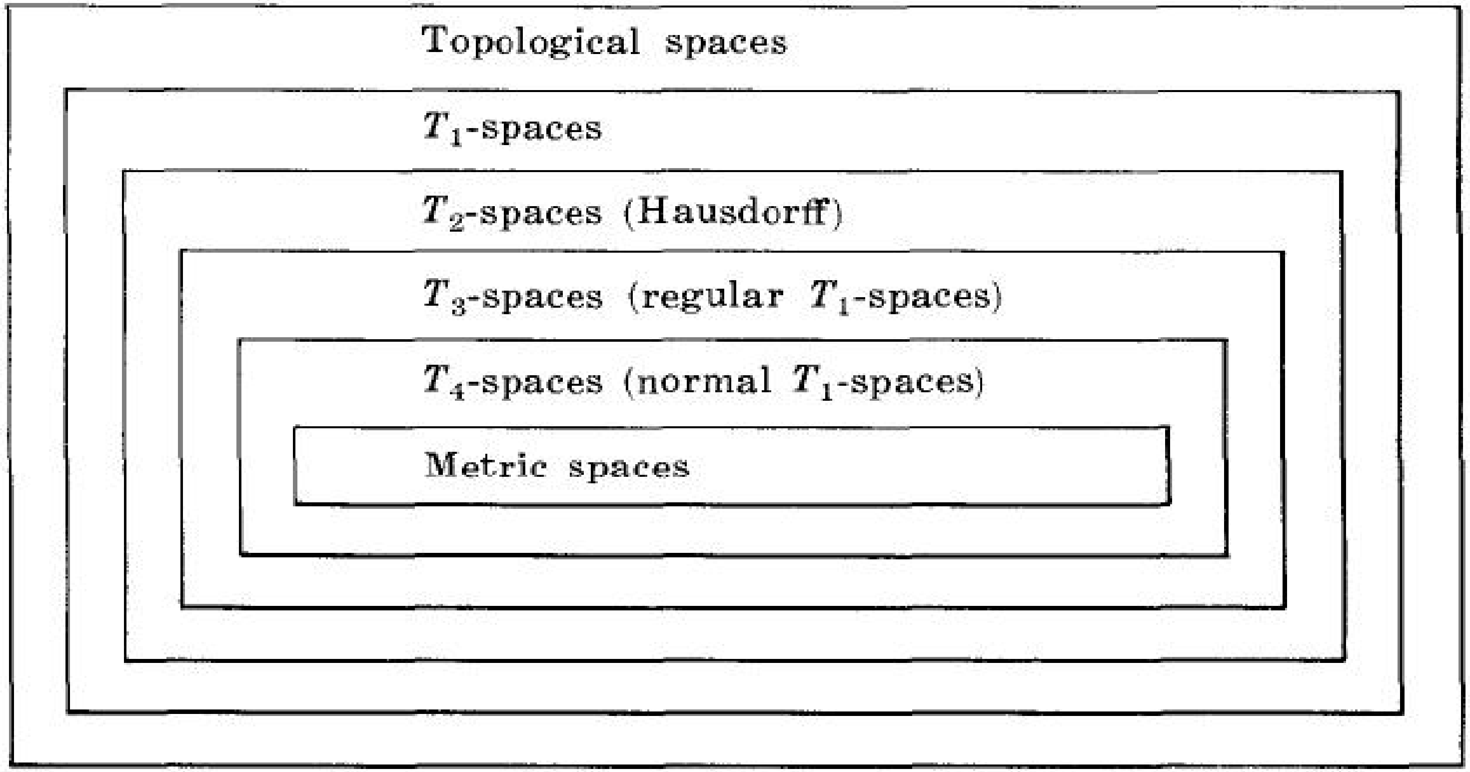
$\Longrightarrow$ $\exists$ 개집합 G, H : ($\{p\} \subset G,\ F \subset H,\ G \cap H = \phi$) by정규공간

$\Longrightarrow$ $\exists$ 개집합 G, H : ($p \in G,\ F \subset H,\ G \cap H = \phi$) ■

[예제] 거리공간은 T_4이다.

(설명) 정리10.3과

예제4.1의 결과


Topological spaces
T_1-spaces
T_2-spaces (Hausdorff)
T_3-spaces (regular T_1-spaces)
T_4-spaces (normal T_1-spaces)
Metric spaces

유리존의 보조정리

X가 정규공간 이고, F_1, F_2가 폐집합 in X, $F_1 \cap F_2 = \phi$이라면,

$\exists$ 연속함수 $f : X \to [0,1]$: $f[F_1] = \{0\}$, $f[F_2] = \{1\}$.

(증명-스케치)

$F_1 \cap F_2 = \phi$

$\Rightarrow$ 폐집합 $F_1 \subset F_2^c$ 개집합

$\Rightarrow$ $\exists$ 개집합 $G_{1/2}$: $F_1 \subset G_{1/2} \subset \overline{G_{1/2}} \subset F_2^c$, by 정리10.6

$\Rightarrow$ $\exists$ 개집합 $G_{1/4}, G_{3/4}$, by 정리10.6 again,

: $F_1 \subset G_{1/4} \subset \overline{G_{1/4}} \subset G_{1/2} \subset \overline{G_{1/2}} \subset G_{3/4} \subset \overline{G_{3/4}} \subset F_2^c$

이 방법으로 계속하면,

$\forall t \in D = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid 0 < m < 2^n,\ m \in \mathrm{N},\ n \in \mathrm{N} \right\}$, $\exists$ 개집합 G_t

: ($t_1 < t_2 \Rightarrow \overline{G_{t_1}} \subset G_{t_2}$)

함수 $f: X \to [0,1]$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{t \mid x \in G_t\}, & x \notin F_2 \\ 1 & , x \in F_2 \end{cases}$$

그러면 $f[F_1] = \{0\}$, $f[F_2] = \{1\}$ 이 되고, 함수 f는 연속임을 보일 수 있다. (참조 p273 증명) ■

유리존의 거리화정리

위상공간 X가 T_4 이고, 제2가산공간이면, X는 거리화 가능하다.

(증명-스케치)

X가 T_4 이고, 제2가산공간

$\Longrightarrow$ X는 힐버트공간 H의 부분공간과 위상동형이다.

$\Longrightarrow$ X는 거리화가 가능하다. ■

(참고) X가 가분공간인 경우 역도 성립한다.

즉, 거리공간 이고 가분공간

$\Rightarrow$ X는 T_4공간 이고 제2가산공간,

by 예제4.1, 정리9.6

점을 분리하는 함수족

함수족 $\mathcal{A} = \{f_i : X \to Y \mid i \in I\}$ 는 점을 분리한다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \ \forall a, b \in X (a \neq b), \exists f \in \mathcal{A} : f(a) \neq f(b)$$

(예제5.1) 함수족 $\mathcal{A} = \{f_n : \mathrm{R} \to \mathrm{R} \mid f_n(x) = \sin(nx),\ n \in \mathrm{N}\}$ 는 점을 분리하지 않는다. 왜냐하면 $\forall n \in \mathrm{N}$, $f_n(0) = 0 = f_n(\pi), 0 \neq \pi$ 이기 때문이다.

[명제10.9] 함수족 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f:$ 연속함수 $\}$가 점을 분리하면, X는 T_2 공간이다.

(증명) 가정에 의하여,

$\forall a,b \in X(a \neq b),\ \exists f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$: $f(a) \neq f(b)$ 이다.

실수공간 $\mathbb{R}$ 은 T_2 공간이므로,

$\exists G, H$ 개집합 : $f(a) \in G,\ f(b) \in H,\ G \cap H = \phi$

함수 f는 연속함수이므로,

$a \in f^{-1}[G]$ 개집합, $b \in f^{-1}[H]$ 개집합, $f^{-1}[G] \cap f^{-1}[H] = \phi$

그러므로 X는 T_2 공간이다. ■

완전정칙공간

위상공간 X는 완전정칙공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $\forall p \notin {}^{\forall} F$ **폐집합 ,** $\exists$ **연속함수** $f: X \to [0,1] : f(p)=0,\ f[F]=\{1\}$

[명제10.10] 모든 완전정칙공간은 정칙공간이다.

(증명) X**를 완전정칙공간,** F**는 폐집합 in** X**이고,** $p \notin F$ **이라고 하자.**

X**가 완전정칙공간이므로,**

$$\exists \text{ 연속함수 } f: X \to [0,1] : f(p)=0,\ f[F]=\{1\}$$

실수공간 R**은** T_2**공간이고,** $0 \neq 1$ **이므로,**

$$\exists \text{ 개집합 } G, H \ : 0 \in G,\ 1 \in H,\ G \cap H = \phi \ \text{ 이다.}$$

f**가 연속함수이므로** $p \in f^{-1}[G]$ **개집합,** $F \subset f^{-1}[H]$ **개집합 이고**

$G \cap H = \phi$ **이므로** $f^{-1}[G] \cap f^{-1}[H] = \phi$ **이다.**

그러므로 X**를 정칙공간이다.** ■

$T_{3\frac{1}{2}}$ 공간

완전정칙 T_1 공간을 $T_{3\frac{1}{2}}$ 공간 (티호노프 공간)이라고 한다.

(주목)

1) T_4 공간이면 T_1 공간도 되고, 유리존의 보조정리에 의하여 완전정칙공간이므로 완전정칙 T_1 공간, 즉 $T_{3\frac{1}{2}}$ 공간이 된다.

2) $T_{3\frac{1}{2}}$ 공간이면 T_1 공간도 되고, 명제 10-10에 의하여 정칙공간이 되므로 T_3 공간이 된다.

[명제10.11] X가 완전정칙 T_1 공간이면, 공역이 실수공간인 연속함수족 $\mathcal{C}(X,\mathrm{R})$는 점을 분리한다.

(증명) $a, b \in X, a \neq b$ **라고 하자.** X **가** T_1**이므로** $\{b\}$ **는 폐집합이다.**

$a \notin \{b\}$ **이고,** X **가 완전정칙공간이므로,**

$\exists$ **연속함수** $f : X \to [0,1] : f(a) = 0,\ f[\{b\}] = \{1\}$ **이다.**

$f \in \mathcal{C}(X, \mathrm{R})$**이고** $f(a) \neq f(b)$ **이므로,**

$\mathcal{C}(X, \mathrm{R})$**는 점을 분리한다.** ■

제11장 콤팩트성(Compactness)

피복, 개피복, 부분피복

1) 집합족 $\mathcal{G} = \{A_i\}_{i \in I}$는 집합 A의 **피복**이다.

$$\Leftrightarrow A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

2) 집합족 $\mathcal{G} = \{A_i\}_{i \in I}$는 집합 A의 **개피복**이다.

$\Leftrightarrow A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ 이고 ($\forall i \in I$, A_i : 개집합) 이다.

3) $\mathcal{C}$는 $\mathcal{G}$의 **부분피복**이다.

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$와 $\mathcal{G}$ 모두 어떤 집합의 피복이고, $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ 이다.

[하이네-보렐 정리]

실수에서 유계인 폐구간의 모든 개피복은 유한 부분피복을 갖는다.

콤팩트집합

위상공간 X의 부분집합 A는 **콤팩트**이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ A의 모든 개피복이 유한 부분피복을 갖는다.

[예제2.1] 하이네-보렐 정리에 의하여 실수공간에서 모든 유계폐구간은 $[a,b]$은 콤팩트이다.

[예제2.2] 위상공간에서 유한집합은 반드시 콤팩트이다.

[예제2.3] 실수보통위상공간에서 개구간 $A=(0,1)$은 콤팩트가 아니다.

(이유) 개구간족 $\mathcal{G} = \left\{\cdots,(\frac{1}{5},\frac{1}{3}),(\frac{1}{4},\frac{1}{2}),(\frac{1}{3},1)\right\}$ 은 A를 덮는데,

$\mathcal{G}$ 안에서 유한개의 구간들을 찾아서 A를 다시 덮을 수는 없다.

[정리11.1] 콤팩트 집합의 연속함수의 상은 콤팩트이다.

(증명) 함수 $f: X \to Y$를 연속함수라 하고, $A \subset X$를 콤팩트집합이라 하자. $\mathcal{G} = \{G_i\}_i$를 A의 상 $f[A]$의 개피복이라 하자.

그러면 $f[A] \subset \underset{i}{\cup} G_i$

$$\Rightarrow A \subset f^{-1}[\underset{i}{\cup} G_i]$$

$$= \underset{i}{\cup} f^{-1}[G_i]$$

여기에서 f가 연속함수이므로 $f^{-1}[G_i]$은 개집합이다.

$\{f^{-1}[G_i]\}_i$는 A의 개피복이고 A는 콤팩트이므로 유한 부분피복

$\{f^{-1}[G_{i_1}], f^{-1}[G_{i_2}], \cdots, f^{-1}[G_{i_n}]\}$이 존재하여

$$A \subset f^{-1}[G_{i_1}] \cup f^{-1}[G_{i_2}] \cup \cdots \cup f^{-1}[G_{i_n}]$$ 이다.

따라서 $f[A] \subset f[f^{-1}[G_{i_1}] \cup f^{-1}[G_{i_2}] \cup \cdots \cup f^{-1}[G_{i_n}]]$

$$= f[f^{-1}[G_{i_1}]] \cup f[[f^{-1}[G_{i_2}]] \cup \cdots \cup f[f^{-1}[G_{i_n}]]$$

$$= G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_n}$$

그러므로 $f[A]$는 콤팩트 집합이다. ■

콤팩트성은 다음 정리에 보는 것처럼 집합의 **절대적성질**이다.

[정리11.2] A가 위상공간 $(X, \Im)$의 부분집합 일 때,

A가 $\Im$에 관하여 콤팩트 $\Leftrightarrow$ A가 상대위상 $\Im_A$에 관하여 콤팩트이다.

(증명) (숙제)

[정리11.3] 콤팩트공간의 폐집합은 콤팩트이다.

(증명) 다음 페이지에.

집합 A가 콤팩트공간 X에 속한 폐집합

$\Longrightarrow A^c$는 개집합

$\mathcal{G} = \{G_i\}_i$ 를 A의 개피복

$\Longrightarrow A \subset \bigcup_i G_i$

$\Longrightarrow (A \cup A^c) \subset (\bigcup_i G_i) \cup A^c$

$\Longrightarrow X \subset (\bigcup_i G_i) \cup A^c$ **: 개피복, 여기서 X는 콤팩트이므로,**

$\Longrightarrow \exists\, G_{i_1}, G_{i_2}, \cdots, G_{i_n}$ **:** $X \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_n} \cup A^c$

$\Longrightarrow (A \cup A^c) = X \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_n} \cup A^c$

$\Longrightarrow A \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_n}$ **, 이유: A^c는 A를 덮지 못하므로.**

그러므로 A는 콤팩트이다. ■

유한교차성

집합족 $\{A_i \mid i \in I\}$는 **유한교차성**을 갖는다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $^{\forall}$유한집합 $J \subset I$, $\cap \{A_j \mid j \in J\} \neq \phi$

* 집합족 $\{A_i \mid i \in I\}$는 **전체교차성**을 가진다. $\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \cap \{A_i \mid i \in I\} \neq \phi$

[예제 3.1] 개구간족 $\mathcal{A} = \left\{(0,1),(0,\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{3}),\cdots\right\}$은 유한교차성을 갖는다. 왜냐하면

$$(0,a_1) \cap (0,a_2) \cap \cdots (0,a_n) = (0,a) \neq \phi, \quad a = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

이기 때문이다. 그런데 $\cap \mathcal{A} = \phi$, 즉 전체교차는 안된다. ■

[정리11.4] 위상공간 X가 콤팩트

$\Leftrightarrow$ 유한교차성을 가진 폐집합족이 전체교차성도 가진다.

(증명)

위상공간 X가 콤팩트

$\Leftrightarrow {}^{\forall}$ 개집합족 $\{G_i\}_{i\in I}$, ($X\subset \bigcup_{i\in I} G_i \Rightarrow \exists$ 유한집합 $J\subset I$: $X\subset \bigcup_{j\in J} G_j$)

$\Leftrightarrow {}^{\forall}$ 폐집합족 $\{F_i\}_{i\in I}$, ($X\subset \bigcup_{i\in I} F_i^c \Rightarrow \exists$ 유한집합 $J\subset I$: $X\subset \bigcup_{j\in J} F_j^c$)

$\Leftrightarrow {}^{\forall}$ 폐집합족 $\{F_i\}_{i\in I}$, ($X\subset (\bigcap_{i\in I} F_i)^c \Rightarrow \exists$ 유한집합 $J\subset I$: $X\subset (\bigcap_{j\in J} F_j)^c$)

$\Leftrightarrow {}^{\forall}$ 폐집합족 $\{F_i\}_{i\in I}$, ($(\bigcap_{i\in I} F_i)\subset X^c \Rightarrow \exists$ 유한집합 $J\subset I$: $(\bigcap_{j\in J} F_j)\subset X^c$)

$\Leftrightarrow {}^{\forall}$ 폐집합족 $\{F_i\}_{i\in I}$, ($\bigcap_{i\in I} F_i=\phi \Rightarrow \exists$ 유한집합 $J\subset I$: $\bigcap_{i\in J} F_i=\phi$)

$\Leftrightarrow {}^{\forall}$ 폐집합족 $\{F_i\}_{i\in I}$, ($({}^{\forall}$ 유한집합 $J\subset I$, $\bigcap_{j\in J} F_j\neq\phi) \Rightarrow \bigcap_{i\in I} F_i\neq\phi$)

$\Leftrightarrow$ 유한교차성을 가진 폐집합족이 전체교차성도 가진다. ■

#7 T_2 **공간에서** A**는 콤팩트집합이고** $p \notin A$

$\Longrightarrow$ $\exists\ G, H$ **개집합 :** $p \in G,\ A \subset H,\ G \cap H = \phi$

(증명)

$\forall a \in A,\ a \neq p$**이므로, by** T_2**조건,**

$\exists\ G_a, H_a$ **개집합 :** $p \in G_a,\ a \in H_a,\ G_a \cap H_a = \phi$

$A \subset \bigcup_{a \in A} H_a$ **(개피복)이고,** A**가 콤팩트**

$\Longrightarrow$ $\exists\ H_{a_1}, H_{a_2}, \cdots, H_{a_n}$ **:** $A \subset H_{a_1} \cup H_{a_2} \cup \cdots \cup H_{a_n}$

$H = H_{a_1} \cup H_{a_2} \cup \cdots \cup H_{a_n}$**,** $G = G_{a_1} \cap G_{a_2} \cap \cdots \cap G_{a_n}$ **라고 하면**

H **와** G**는 개집합이고** $p \in G$ **이다. 한편,**

$^{\forall} i = 1, 2, \cdots n,\ H_{a_i} \cap G_{a_i} = \phi$ **이므로,**

$$H_{a_i} \cap G = H_{a_i} \cap G_{a_1} \cap G_{a_2} \cap \cdots \cap G_{a_n}$$

$$= \phi$$

그러므로 $H \cap G = (H_{a_1} \cup H_{a_2} \cup \cdots \cup H_{a_n}) \cap G$

$$= (H_{a_1} \cap G) \cup (H_{a_2} \cap G) \cup \cdots \cup (H_{a_n} \cap G)$$

$$= \phi \cup \phi \cup \cdots \cup \phi = \phi \qquad \blacksquare$$

[정리11.5] T_2 공간의 모든 콤팩트집합은 폐집합이다.

(증명) A를 T_2공간 X에서 콤팩트 집합이라고 하자.

$\forall b \in A^c$, **by #7,**

$\exists\ G_b, H_b$ **개집합 :** $b \in G_b,\ A \subset H_b,\ G_b \cap H_b = \phi$

$\Rightarrow\ G_b \cap A = \phi \Rightarrow\ G_b \subset A^c$

그러므로 ($\forall b \in A^c$, $b \in G_b$, $G_b \subset A^c$)

$$\Rightarrow\ A^c = \bigcup_{b \in A^c} G_b$$

$\Rightarrow\ A^c$**는 개집합이다.** $\blacksquare$

[정리11.6] A, B **(**$A \cap B = \phi$**)가 콤팩트 in** T_2 **공간** X

$$\Rightarrow \ \exists\, G, H \text{ 개집합 : } B \subset G,\ A \subset H,\ G \cap H = \phi$$

(증명) $\forall\, b \in B,\ A \cap B = \phi$ **이므로** $b \notin A$**이다.**

By #7, $\exists\ G_b, H_b$ **개집합 :** $b \in G_b,\ A \subset H_b,\ G_b \cap H_b = \phi$

$B \subset \bigcup_{b \in B} G_b$ **(개피복)이고,** B**가 콤팩트**

$$\Rightarrow \ \exists\ G_{b_1}, G_{b_2}, \cdots, G_{b_n} \ :\ B \subset G_{b_1} \cup G_{b_2} \cup \ \cdots \ \cup G_{b_n}$$

$G = G_{b_1} \cup G_{b_2} \cup \ \cdots \ \cup G_{b_n}$**,** $H = H_{b_1} \cap H_{b_2} \cap \ \cdots \ \cap H_{b_n}$ **라고 하면**

G**와** H**는 개집합이고,** $B \subset G$ **,** $A \subset H$ **이다.**

모든 $i = 1, 2, \cdots n$ **에 대하여,** $G_{b_i} \cap H_{b_i} = \phi$ **이므로**

$$G_{b_i} \cap H = G_{b_i} \cap H_{b_1} \cap H_{b_2} \cap \ \cdots \ \cap H_{b_n}$$

$$= \phi$$

그러므로 $G \cap H = (G_{b_1} \cup G_{b_2} \cup \cdots \cup G_{b_n}) \cap H$

$$= (G_{b_1} \cap H) \cup (G_{b_2} \cap H) \cup \cdots \cup (G_{b_n} \cap H)$$

$$= \phi \cup \phi \cup \cdots \cup \phi = \phi \quad \blacksquare$$

[따름정리 11.7] 모든 콤팩트 T_2 공간은 정규공간이다.

(증명) A, B **(**$A \cap B = \phi$**)를 폐집합이라고 하자.**

$\Longrightarrow$ A, B **콤팩트 집합, by 정리 11.3**

$\Longrightarrow$ $\exists\, G, H$ **개집합 :** $B \subset G,\ A \subset H,\ G \cap H = \phi$ **, by 정리11.6** $\blacksquare$

[정리11.8] X**가 콤팩트,** Y**가** T_2**공간,** $f : X \to Y$ **가 전단사, 연속함수 이면,** f^{-1}**도 연속이다. 따라서** X**와** Y**는 위상동형이다.**

(증명) $f^{-1} : Y \to X$ **가 연속함수임을 보이자.**

F가 폐집합 in X

$\Longrightarrow$ F가 콤팩트 in X , by 정리 11.3

$\Longrightarrow$ $f(F)$가 콤팩트 in Y , by f:연속함수

$\Longrightarrow$ $f(F)$는 폐집합, by 정리11.5 ■

점열콤팩트

위상공간 안의 집합 A는 점열콤팩트집합이다.

정의

$\Longleftrightarrow$ A의 원소들로 이루어진 모든 점열이 A안의 점으로 수렴하는 부분 점열을 가진다.

[예제 5.1] 유한 부분집합 A는 점열콤팩트이다.

(풀이) 점열$< a_i >$ 이 A의 원소들로만 이루어졌다면, A가 유한 집합이므로 그 점열에서 무한번 나타나는 원소가 적어도 하나 있다.

그것을 a_0 라고 하면 $< a_0, a_0, a_0, \cdots >$ 는 $< a_i >$ 의 부분 점열이고,

$a_0 \in A$ 이며, 부분 점열 $< a_0, a_0, a_0, \cdots >$ 은 a_0 로 수렴한다. ■

[예제 5.2] 보통위상을 가진 실수 공간에서 개구간 $A = (0,1)$ 은 점열콤팩트가 아니다.

(증명) A 안의 점열 $< \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots >$ 는 0 으로 수렴하므로 모든 부분열도 0 으로 수렴한다. 그런데 $0 \not\in A$ 이다. 그러므로 A 는 점열콤팩트가 아니다. ■

집적점(가산)콤팩트

위상공간 안의 집합 A 는 집적점(가산)콤팩트집합이다.

정의
$\Leftrightarrow$ A 의 모든 무한 부분집합이 A 안에 집적점을 갖는다.

참고 : T_1 공간에서는,

집합 A는 가산(집적점)콤팩트집합이다.

$\Leftrightarrow$ A의 모든 가산 개피복이 유한부분 피복을 갖는다.

볼차노-바이어슈트라스 정리

실수의 모든 유계 무한 집합은 집적점을 갖는다.

[예제 6.1] 실수의 유계 폐구간 $A=[a,b]$ 은 가산콤팩트이다.

(증명) B가 A의 무한 부분집합이라면 유계집합이므로

볼차노-바이어슈트라스 정리에 의하여 B는 집적점을 갖는다.

A가 폐집합이므로 B의 집적점은 A에 속한다. ■

[예제 6.2] 보통위상을 가진 실수 공간에서 개구간 $A=(0,1)$은

가산콤팩트가 아니다.

(증명) A안의 무한 부분집합 $B=\left\{\frac{1}{2,}\frac{1}{3},\frac{1}{4,}\cdots\right\}$는 0을 유일한 집적점으로 가지는데, 0이 A에 속하지 않아서 A는 가산 콤팩트가 아니다. ■

[정리11.9] 1) 모든 콤팩트 공간은 가산콤팩트이다.

2) 모든 점열콤팩트 공간은 가산콤팩트이다.

(증명1) X를 콤팩트 공간이라 하고, $A\subset X$ 라 하자.

A는 집적점을 갖지 않음

$$\Rightarrow\ \forall p\in X, p\notin A'$$

$$\Rightarrow\ \forall p\in X, p\in {}^{\exists}G_p(\text{개집합}):(G_p\setminus\{p\})\cap A=\phi$$

(따라서 G_p 은 A의 원소를 0 개 또는 1개를 갖는다.)

$$\Rightarrow\ \{G_p\mid p\in X\}$$ 는 X의 개피복

$\Longrightarrow \quad \exists\, G_{p_1}, G_{p_2}, \cdots G_{p_n} : X \subset G_{p_1} \cup G_{p_2} \cup \cdots \cup G_{p_n}$ **, by 콤팩트**

$\Longrightarrow \quad A \subset X \subset G_{p_1} \cup G_{p_2} \cup \cdots \cup G_{p_n} \equiv G$

$\Longrightarrow$ A**는 유한집합 (이유:** G **안에는** A**의 원소가 유한개)**

따라서 A**가 무한집합이면** A**는 집적점을 갖는다.**

(증명2) X**를 점열콤팩트 공간이라 하자**

A**가** X**의 무한 부분집합**

$\Longrightarrow \quad \exists$ **점열**$< a_i >$ **in** A **:** $(i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j)$

$\Longrightarrow \quad \exists\, p \in X,$ **부분점열**$< a_{i_k} >$ **of** $< a_i >$ **:** $(a_{i_k} \rightarrow p)$**, by 점열콤**

$\Longrightarrow \quad p \in {}^{\forall} G$**: 개집합,** $\exists\, k_0 \in \mathrm{N}$ **: (** $k > k_0 \Rightarrow a_{i_k} \in G$ **)**

$\Longrightarrow \quad p \in {}^{\forall} G$**: 개집합,** $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi$

$\Longrightarrow$ p**는** A**의 집적점** ■

[예제 6.3] 자연수 집합 N 위에 집합

$$\mathcal{A} = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\cdots\}$$

에 의하여 생성되는 위상을 $\Im$ 라고 하자.

(1) 집합 $B(\neq \phi)$를 N의 (무한) 부분집합이라 하자. $n \in B$이 홀수이면 $(n+1)$이 N 안에서 B의 집적점이 된다. $n \in B$이 짝수이면 $(n-1)$이 N 안에서 B의 집적점이 된다. 따라서 $(\mathrm{N},\Im)$는 가산콤팩트이다.

(2) 집합족 $\mathcal{A}$ 는 N의 개피복인데 유한 부분피복을 갖지 않는다. 따라서 $(\mathrm{N},\Im)$는 콤팩트가 아니다.

(3) 점열 $< 1,2,3,\cdots >$는 수렴하는 부분열을 포함하지 않는다. 그러므로 $(\mathrm{N},\Im)$는 점열콤팩트가 아니다.

국소콤팩트 공간

위상공간 X는 국소콤팩트이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$$ **위상공간 X의 모든 점에 콤팩트 근방이 존재한다.**

[정리11.10] 모든 콤팩트 공간은 국소콤팩트이다.

(증명) 전체공간이 각 점의 근방이 되고, 콤팩트집합이다.

[예제 7.1] 실수 공간 $\mathbb{R}$ 은 콤팩트는 아니지만 국소콤팩트이다.

(1) $\mathcal{A} = \{\cdots(-3,-1),(-2,0),(-1,1),(0,2),(1,3),\cdots\}$ 는

$\mathbb{R}$ 의 개피복인데, 유한 부분피복을 가질 수 없다.

그러므로 $\mathbb{R}$ 은 콤팩트가 아니다.

(2) $\delta > 0$ 이라고 하자.

$\forall p \in \mathbb{R}$, 폐구간 $[p-\delta, p+\delta]$ 는 p 의 근방이고, 콤팩트

집합이다. 그러므로 $\mathbb{R}$ 은 국소콤팩트이다.

콤팩트화공간

위상공간 Y 는 X 의 **콤팩트화공간**이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ Y가 콤팩트공간이고, X 가 Y의 부분공간과 위상동형이다.

[예제 8.1]

보통위상을 가진 실수공간 (R,u)을 생각하자. 실수집합 R에 두 점을 부과하여 **확장된 실수집합** $\mathrm{R}^* = \mathrm{R} \cup \{-\infty, \infty\}$위에 순서관계를

$$\forall a \in \mathrm{R}, \ -\infty < a < \infty$$

로 확장하자. 아래 형식의 집합들의 모임은 R^* 위의 어떤 위상의 기저가 되는 조건(2가지조건)을 만족한다.

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$

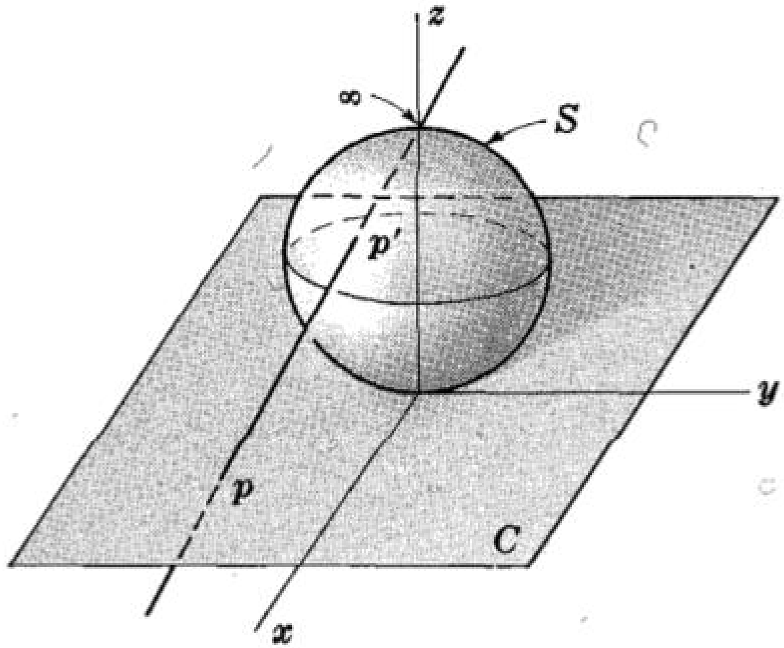
$$(a,\infty] = \{x \mid a < x\}$$

$$[-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$$

그 위상을 u^*라고 하면 (R^*,u^*)은 콤팩트공간이고, 부분공간으로 (R,u)를 포함한다. 따라서 위상공간 (R^*,u^*)은 (R,u)의 콤팩트화 공간이다. **(숙제)** (R^*,u^*)이 콤팩트임을 보여라

[참고] $(\mathrm{R},u) \cong (a,b)$ 이므로 $(\mathrm{R}^*,u^*) \cong [a,b]$ 임을 알 수 있다.

[예제8.2] C는 xy평면이고, S는 반지름이 1인 구면이라고 하자. 구의 꼭대기 ∞에서 C위의 한점 p위로 직선을 이으면, 그 직선은 구면 S와 점 p'에서 만난다. 함수 $f: C \to S$, $f(p) = p'$는 C와 집합 $S \setminus \{\infty\}$와 사이에 위상동형사상이다. 구면 S는 콤팩트공간이므로 S는 C의 **콤팩트화공간**이다.



한점콤팩화공간(=Alexandrov콤팩트화공간)

$(X_\infty, \mathfrak{I}_\infty)$는 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$의 **한점콤팩트화공간**이다.

정의

$\Leftrightarrow$ $X_\infty = X \cup \{\infty\}$, $\mathfrak{I}_\infty = \mathfrak{I} \cup \{X_\infty \setminus A \mid A$: 콤팩트 폐집합 in$X$ $\}$

주목: $\infty \in (X_\infty \setminus A)$

[명제11.11] $\mathfrak{I}_\infty$는 X_∞위의 위상이 되고, $(X_\infty, \mathfrak{I}_\infty)$는 $(X, \mathfrak{I})$의 하나의 콤팩트화공간이 된다.

(증명) 생략 (숙제) $(X_\infty, \mathfrak{I}_\infty)$가 콤팩트임을 보여라

[정리11.12] $(X, \mathfrak{I})$가 국소콤팩트 T_2공간이면, $(X_\infty, \mathfrak{I}_\infty)$는 콤팩트 T_2공간이다. (증명) 생략

[정리11.14] 거리공간에서는 다음 3가지 콤팩트가 일치한다.

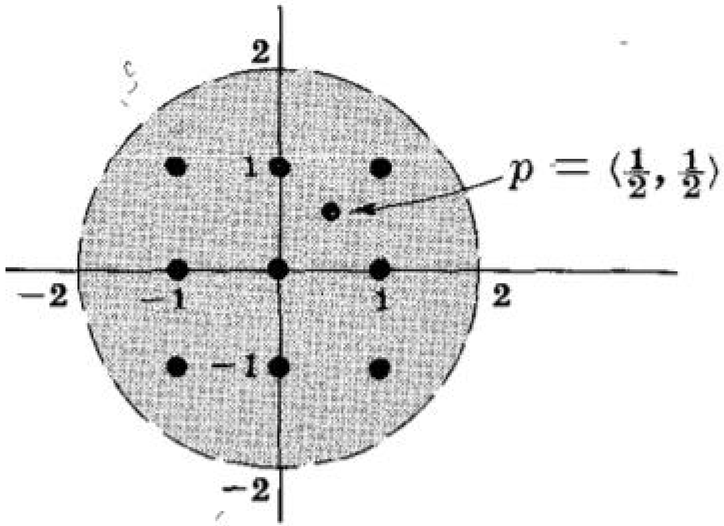
콤팩트 = 가산콤팩트 = 점열콤팩트

ε-네트 (in 거리공간)

유한집합 E는 집합 A의 ε-네트 ($\varepsilon > 0$)이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall p \in A, \ \exists e \in E : d(p, e) < \varepsilon$$

[예제 9.1] A를 중심이 원점이고 반지름이 2인 열린원반이라고 하자. E를 그림과 같이 집합 A안에 있는 정수 성분의 점들의 집합이라고 하자.



$\varepsilon = \dfrac{3}{2}$ 일 때, E는 A의 ε-네트가 된다.

$\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ 일 때, E는 A의 ε-네트가 아니다.

왜냐하면

A안에 있는 점 $p = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$는 $\forall e \in E,\ d(p,e) > \dfrac{1}{2}$이기 때문이다.

완전유계 (in 거리공간)

집합 A는 완전유계 집합이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$, A가 ε-네트를 가진다.

[명제11.15]

집합 A는 완전유계 집합이다.

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists A_1, A_2, \cdots, A_n : (1)\, A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$
$$(2)\, d(A_i) < \varepsilon, \forall i = 1,2, \cdots, n$$

[명제11.16] 모든 완전유계 집합은 유계집합이다.

[예제 9.2] 명제11.16의 역이 성립하지 않는다.

(설명) 힐버트 공간에서 집합 A를 다음 점으로 이루어진 집합이라 하자.

$$e_1 = (1,0,0,\cdots),\ e_2 = (0,1,0,0,\cdots),\ e_3 = (0,0,1,0,0,\cdots),\ \cdots$$

그러면 $d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$, $^{\forall} i \neq j$ 이다. 따라서 $d(A) = \sqrt{2}$ 이므로 A는 유계집합이다. 그러나 $\varepsilon = 1/2$라 하면, ε보다 작은 지름을 가진 A의 부분집합은 한 원소 집합이다. 따라서 A는 그런 한 원소집합들의 유한개의 합집합으로 이루어질 수 없다. 따라서 A는 완전유계 집합이 아니다.

[보조정리 11.17] 거리공간에서 점열콤팩트이면 완전유계이다.

(증명) 대우로 증명.

집합 A가 완전유계가 아니다.

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : A$는 ε-net를 갖지 않는다.

$a_1 \in A \;\Rightarrow\; \exists\, a_2 \in A : d(a_1, a_2) \geq \varepsilon$

그렇지 않다면, $\{a_1\}$이 ε-net가 된다.

$\Rightarrow\; \exists\, a_3 \in A : d(a_1, a_3) \geq \varepsilon,\; d(a_2, a_3) \geq \varepsilon$

그렇지 않다면, $\{a_1, a_2\}$이 ε-net가 된다.

이 방법으로, $\exists$ 점열 $< a_1, a_2, a_3, \cdots > : d(a_i, a_j) \geq \varepsilon,\ ^{\forall} i \neq j$

이 점열은 수렴하는 부분 점열을 가질 수가 없다. ■

르벡수 (of 피복 in 거리공간)

$\delta > 0$는 집합 A의 피복 $\mathcal{A}$ 의 르벡수이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ (($B \subset A,\ d(B) < \delta$) $\Rightarrow\ \exists\, G \in \mathcal{A} : B \subset G$)

[보조정리 11.18] 거리공간에서 점열콤팩트 집합의 모든 개피복은 르벡수를 갖는다.

(증명)

$\mathcal{A}$를 점열콤펙트 집합 A의 개피복이라고 하자. 만약 $\mathcal{A}$의 르벡수가 존재하지 않는다고 하면

$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists B_n \subset A$:

(1) $d(B_n) < \delta_n \equiv 1/n$

(2) $^\forall G \in \mathcal{A}$, $B_n \not\subset G$

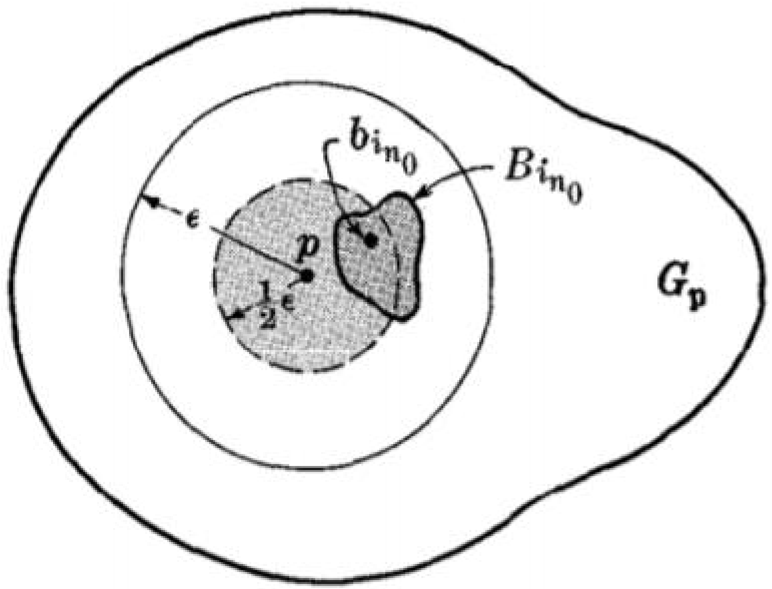
이다. 여기서

$\forall n \in \mathbb{N},\ \ B_n \neq \phi$ (이유: $B_n \not\subset G$)

$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \exists b_n \in B_n (\subset A)$

$\Longrightarrow\ \ \exists p \in A$, 부분 점열 $< b_{n_k} >$: $b_{n_k} \to p$ (이유: A가 점열콤팩트)

$\Longrightarrow\ \ \exists$ 개집합 $G_p \in\ \mathcal{A}$: $p \in G_p$ (이유: $\mathcal{A}$ 가 A의 피복)



$\Longrightarrow$ ∃ **열린구** $S(p,\varepsilon)$ **이 존재하여** $p \in S(p,\varepsilon) \subset G_p$

$\Longrightarrow$ $\exists\, n_k$**:** $d(p, b_{n_k}) < 1/n_k < \varepsilon/2$ **(이유 :** $b_{n_k} \to p$ **)**

$\Longrightarrow$ $d(p, b_{n_k}) < \varepsilon/2$ **,** $d(B_{n_k}) < \varepsilon/2$ **(이유 :** $d(B_{n_k}) < \delta_{n_k} \equiv 1/n_k$ **)**

$\Longrightarrow$ $B_{n_k} \subset S(p,\varepsilon)$

$\Longrightarrow$ $B_{n_k} \subset G_p$ **(이유:** $S(p,\varepsilon) \subset G_p$ **)**

$\Longrightarrow$ **모순! to (**$\forall\, G \in \mathcal{A}$ **,** $B_n \not\subset G$**)**

모순이 일어나지 않으려면, $\mathcal{A}$ **의 르벡수가 존재해야 한다.** ■

[정리11.14] 거리공간에서는 다음 3가지 콤팩트가 일치한다.

콤팩트 = 가산콤팩트 = 점열콤팩트

(증명 : A **가 콤팩트** $\Longrightarrow$ A **가 가산콤팩트)**

by [정리11.9] 1)

(증명 : A 가 가산콤팩트 $\Rightarrow$ A 가 점열콤팩트)

$< a_{1,} a_{2,} a_{3,} \cdots >$ 를 A의 점열이라고 하자. 점열의 치역인 집합 $B = \{a_{1,} a_{2,} a_{3,} \cdots \}$가 유한집합이라면 어떤 a_{i_0}가 존재하여 무한개의 $j \in \mathrm{N}$에 대하여, $a_{i_0} = a_j$가 된다. 그러면 $< a_{i_0}, a_{i_0}, a_{i_0}, \cdots >$ 는 $< a_{1,} a_{2,} a_{3,} \cdots >$ 의 부분열이며, a_{i_0} 로 수렴한다.

한편 $B = \{a_{1,} a_{2,} a_{3,} \cdots \}$가 무한집합이면 A가 가산콤팩트라는 가정에 의하여 B는 A안에 집적점을 가진다. 거리공간에서 축소 국소기저를 가지므로 집적점으로 가는 부분열을 선택할 수 있다.

결국 B가 유한이던지, 무한이던지, 임의의 점열$< a_{1,} a_{2,} a_{3,} \cdots >$ 가 수렴하는 부분열을 가지므로 A는 점열콤팩트이다.

(증명 : A 가 점열콤팩트 $\Rightarrow$ A 가 콤팩트)

$\mathcal{A}$ 를 A 의 개피복

$\Rightarrow$ $\exists$ 르벡수 $\delta > 0$ by (보조정리11.18, A: 점열콤팩트)

A 가 점열콤팩트

$\Rightarrow$ A 는 완전유계 by 보조정리11.17

$\Rightarrow$ $\exists\, B_{1,} B_2, \cdots B_n$: (1) $d(B_i) < \delta$

(2) $A \subset B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$ by 명제11.15

$\Rightarrow$ $\exists\, G_{1,} G_2, \cdots G_n \in \mathcal{A}$: $B_i \subset G_i,\ ^\forall i = 1,2,3,\cdots,n$

(이유 : δ 가 피복 $\mathcal{A}$ 의 르벡수)

$\Rightarrow$ $A \subset G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$

A 의 임의의 개피복이 유한부분피복을 가지므로 A 는 콤팩트 집합이다. ■

[#25] $f:(X,d)\to(Y,d^*)$가 거리공간 사이의 연속함수라고 하자. (X,d)가 콤팩트 이면 f는 **균등연속**이다. (f는 **균등연속**

정의

$\Leftrightarrow$ ($\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0:(d(x,y)<\delta\Rightarrow d^*(f(x),f(y))<\varepsilon)$))

(증명)

$\varepsilon>0$라 하자. f는 모든 점 $p\in X$에서 연속이므로,

$\exists\ \delta_p>0$: ($x\in S(p,\delta_p)\Rightarrow f(x)\in S(f(p),\varepsilon/2)$) -- (1)

집합족 $\mathcal{A}=\{S(p,\delta_p)\mid p\in X\}$는 콤팩트 집합 X의 개피복이다.

거리공간 X는 또한 점열콤팩트이므로, $\mathcal{A}$는 르벡수 $\delta>0$를 갖는다.

$d(x,y)<\delta$

$\Rightarrow\ d(\{x,y\})<\delta$ (설명: $d\{x,y\}$은 집합의 크기)

$\Rightarrow\ \{x,y\}\subset S(p_0,\delta_{p_0})$ by δ: $\mathcal{A}$ 의 르벡수

$\Rightarrow\ f(x),f(y)\in S(f(p),\varepsilon/2)$ by (1)

$\Rightarrow\ d(f(x),f(y))<\varepsilon$ (이유: 반지름 $\varepsilon/2$의 구에 포함) ■

제12장 적공간(Product Space)

적집합과 사영함수

$\{X_i \mid i \in I\}$가 임의의 집합족일 때 X가 적집합

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \{< a_i : i \in I > \mid a_i \in X_i\}$$

일 때 함수

$$\pi_j : X \to X_j \ , \quad \pi_j(< a_i : i \in I >) = a_j \in X_j$$

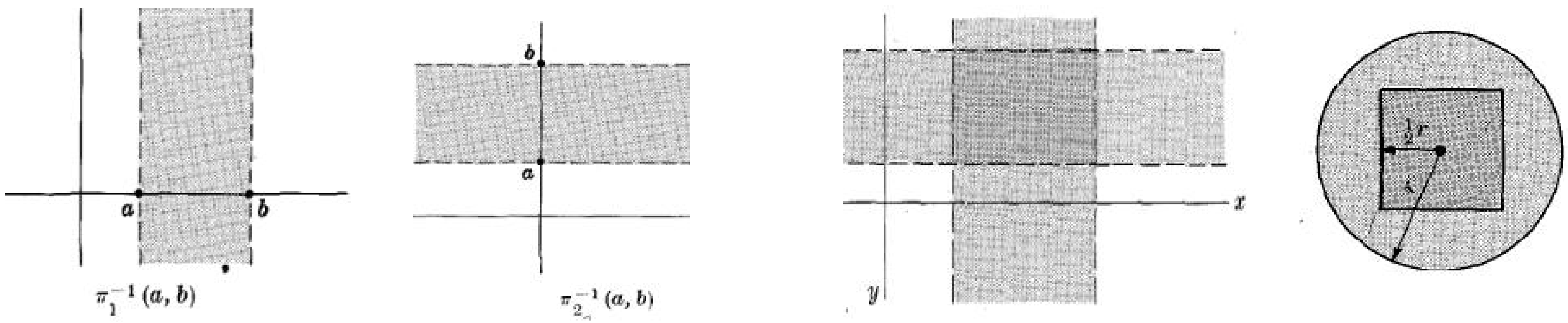
로 정의되는 함수를 사영함수라고 한다.

적위상과 적공간

$\{(X_i, \Im_i) \mid i \in I\}$이 위상공간 족일 때 적집합 $X = \prod_{i \in I} X_i$ 위에, 모든 사영함수 $\forall i \in I, \pi_i : X \to X_i$ 를 연속이 되게 하는 X 위의 가장 작은 위상 $\Im$을 적위상(product topology) 이라고 하고, $(X, \Im)$를 적공간이라고 한다.

다시 말하면, 적위상은 사영함수들에 의하여 생성된 위상이다. 따라서 적위상 $\Im$은 집합족 $\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I}\left\{\pi_i^{-1}(G) \mid G\in \Im_i\right\}$를 부분기저로 갖는 X위의 위상이다.

[예제 1.1] R^2위의 적위상은 $\pi_1^{-1}((a,b))$와 $\pi_2^{-1}((a,b))$와 같은 유형의 집합들이 부분기저를 이루는데, 이것들은 그림과 같이 긴 띠를 이루고 있다. 기저의 원소는 이 띠들의 교집합인 열린 사각형 내부안의 점들의 집합인데 이것들은 R^2위에 보통위상을 만든다.



[정리12.1] R^2위의 보통위상은 적위상이다.

[예제1.2] T_2 **공간들** $\{X_i \mid i \in I\}$**의 적공간** $X = \prod_{i \in I} X_i$**은** T_2 **공간이 된다.**

(증명)

$p = < a_i : i \in I >,\ q = < b_i : i \in I >$ **는** X **위에서의 다른 두 점**

$\Longrightarrow \exists\, i_0$ **:** $a_{i_0} \neq b_{i_0}$

$\Longrightarrow \exists$ **개집합** G, H **in** X_{i_0} **:** $a_{i_0} \in G,\ b_{i_0} \in H,\ G \cap H = \phi$

(이유 : X_{i_0} **는** T_2 **공간이므로)**

$\Longrightarrow$ **1)** $p \in \pi_{i_0}^{-1}[G],\ q \in \pi_{i_0}^{-1}[H]$

2) $\pi_{i_0}^{-1}[G] \cap \pi_{i_0}^{-1}[H] = \pi_{i_0}^{-1}[\,G \cap H\,] = \phi$

3) $\pi_{i_0}^{-1}[G],\ \pi_{i_0}^{-1}[H]$ **: 개집합**

(이유 : X **가 적공간이므로** π_{i_0} **는 연속함수)**

그러므로 적공간 $X = \prod_{i \in I} X_i$**은** T_2 **공간이 된다.** ■

[명제12.2] 유한개의 위상공간 $(X_1,\Im_1),(X_2,\Im_2),\cdots,(X_n,\Im_n)$에 대하여, 집합족 $\mathcal{A}=\{G_1\times G_2\times\cdots\times G_n \mid G_i\in\Im_i\}$은 적공간 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 위의 적위상의 기저가 된다.

(주의) 무한개의 경우는 적위상이 아닌, 적위상보다 더 섬세한 위상이 된다.

(증명)

집합족 $\mathcal{S}=\bigcup_{i=1}^{n}\{\pi_i^{-1}(G)\mid G\in\Im_i\}$는 적위상 $\Im$의 부분기저이므로 $\Im$의 기저의 원소들은 $\mathcal{S}$ 안의 유한개의 집합들을 교집합한 것들이다.

같은 공간 $\Im_i$안에 들어 있는 개집합들 $G_1,G_2,\cdots,G_k\in\Im_i$의 경우에

$$\begin{aligned}&\pi_i^{-1}(G_1)\cap\pi_i^{-1}(G_2)\cap\ \cdots\ \cap\pi_i^{-1}(G_k)\\&=\pi_i^{-1}(G_1\cap G_2\cap\ \cdots\ \cap G_k)\\&=\pi_i^{-1}(G),\quad G=(G_1\cap G_2\cap\ \cdots\ \cap G_k)\in\Im_i\end{aligned}$$

와 같이 하나의 개집합 G를 사용하여 $\pi_i^{-1}(G)$로 표시할 수 있으므로

$\mathfrak{I}$의 기저의 원소들은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\pi_1^{-1}(G_1)\cap\pi_2^{-1}(G_2)\cap\cdots\cap\pi_n^{-1}(G_n),\ G_i\in\mathfrak{I}_i$$

= 띠들의 유한 교집합

= $G_1\times G_2\times\cdots\times G_n,\ G_i\in\mathfrak{I}_i$ ■

[정리12.3] $\{(X_i,\mathfrak{I}_i)\mid i\in I\}$이 위상공간 족일 때 집합족

$\mathcal{S}=\bigcup_{i\in I}\left\{\left(\prod_{j\neq i}X_j\right)\times G\ \middle|\ G\in\mathfrak{I}_i\right\}$은 적집합 $X=\prod_{i\in I}X_i$ 위의 적위상

$\mathfrak{I}$의 부분기저이다.

(증명)

$\mathcal{S}$ 이 적위상 $\mathfrak{I}$의 부분기저

$$\Rightarrow\ \mathcal{S}=\bigcup_{i\in I}\left\{\pi_i^{-1}(G)\mid G\in\mathfrak{I}_i\right\}$$

$$\Rightarrow\ \mathcal{S}=\bigcup_{i\in I}\left\{\left(\prod_{j\neq i}X_j\right)\times G\mid G\in\mathfrak{I}_i\right\}$$ ■

[정리12.4] $\{(X_i, \Im_i) \mid i \in I\}$이 위상공간족일 때 집합족

$$\mathscr{B} = \left\{ \left(\prod_{j \notin J} X_j\right) \times G_{j_1} \times G_{j_2} \times \cdots \times G_{j_n} \mid G_j \in \Im_j, \forall j \in J = \{j_1, j_2, \cdots, j_n\} \subset I \right\}$$

은 적집합 $X = \prod_{i \in I} X_i$ 위의 적위상의 **기저**이다.

(증명) 집합족 $\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \{\pi_i^{-1}(G) \mid G \in \Im_i\}$는 적위상 $\Im$의 부분기저이므로 $\Im$의 기저의 원소들은 $\mathcal{S}$ 안의 유한개의 집합들을 교집합한 것들이다. 같은 공간안에 들어 있는 개집합들 $G_1, G_2, \cdots, G_k \in \Im_i$의 경우는

$$\begin{aligned} &\pi_i^{-1}(G_1) \cap \pi_i^{-1}(G_2) \cap \cdots \cap \pi_i^{-1}(G_k) \\ &= \pi_i^{-1}(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_k) \\ &= \pi_i^{-1}(G), \qquad G = G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_k \in \Im_i \end{aligned}$$

와 같이 하나의 개집합 G를 사용하여 $\pi_i^{-1}(G)$로 표시할 수 있으므로 $\Im$의 기저의 원소들은 다음과 같이 표시할 수 있다.

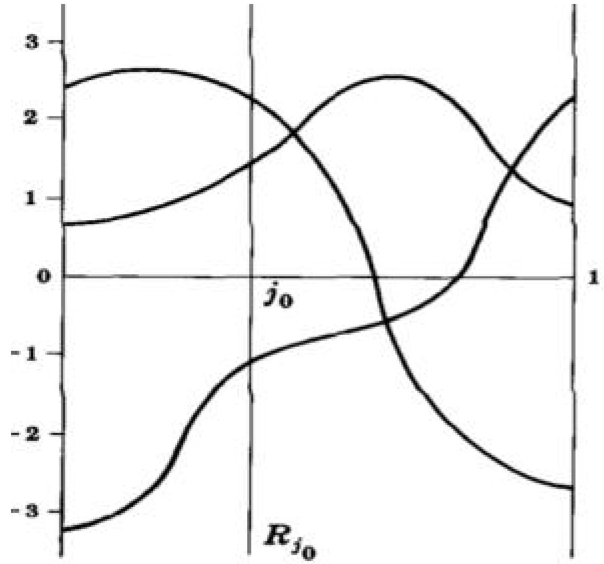
$$\pi_{i_1}^{-1}(G_{i_1}) \cap \pi_{i_2}^{-1}(G_{i_2}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(G_{i_n})$$

$$= [(\prod_{j \neq i_1} X_j) \times G_{i_1}] \cap [(\prod_{j \neq i_2} X_j) \times G_{i_2}] \cap \cdots \cap [(\prod_{j \neq i_n} X_j) \times G_{i_n}]$$

$$= (\prod_{j \notin J} X_j) \times G_{j_1} \times G_{j_2} \times \cdots \times G_{j_n}$$

여기서 $G_j \in \Im_j$, $\forall j \in J = \{j_1, j_2, \cdots, j_n\}$. ■

적공간의 예



Members of X

$\mathrm{R_i}$ 를 실수공간 R의 복사된 공간이라 하자.

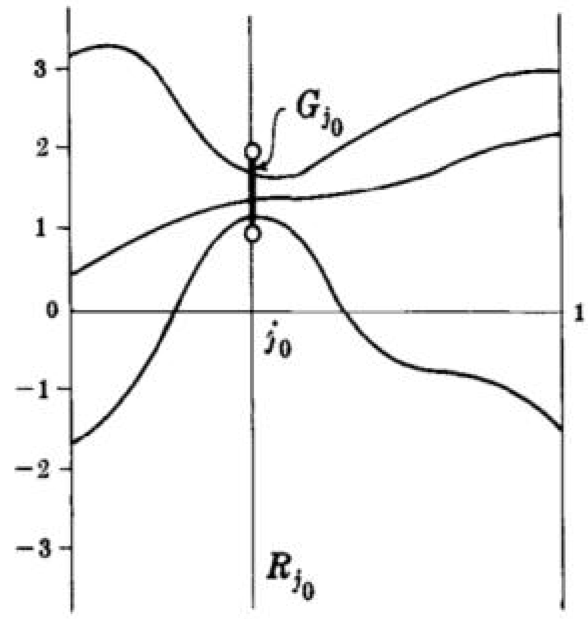
적공간 $X = \prod_{i \in I} \mathrm{R_i}$ **의 원소들은 그림과 같다.**

수평선은 첨수집합 $I = [0,1]$ **을 나타내고,**

폐구간 $I = [0,1]$ **위의 한 점** j_0 **을 지나는**

수직선은 좌표공간 $\mathrm{R_{j_0}}$ **을 나타낸다.**

적공간 X의 한 원소 $p \in X$는 폐구간 I에서 $\mathbb{R}$로 가는 함수 $p : I \to \mathbb{R}$ 이다.



Members of $\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$

X 위의 적위상의 부분기저의 원소는 다음과 같다.

$$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}] = \Big(\prod_{i \neq j_0} \mathrm{R_i}\Big) \times \mathrm{G_{j_0}}$$

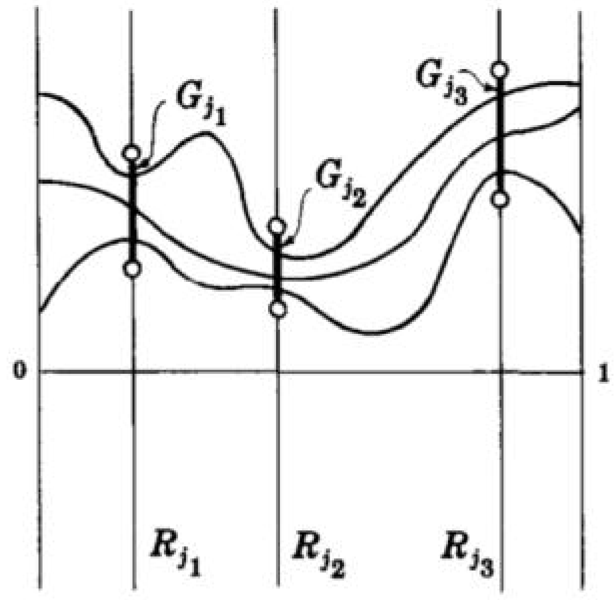
여기서 G_{j_0} 는 좌표공간 $\mathrm{R_{j_0}}$ 에서의 개집합이다.

예를 들어 $G_{j_0} = (1,2)$ 이라면 $\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$ 은 $a_{j_0} \in G_{j_0} = (1,2)$인 X안의 모든 점 $p = < a_i : i \in I >$, 즉 $1 < p(j_0) < 2$인 모든 함수들 $p : I \to \mathbb{R}$ 로 이루어진다. 그래프로 보면, $\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$ 은 좌표공간 $\mathrm{R_{j_0}}$ 을 나타내는 수직선 위의 개구간 $G_{j_0} = (1,2)$ 을 통과하는 모든 함수들로 이루어진다.

마지막으로, X 위의 적위상의 기저의 원소인 개집합 B를 묘사해 보자. B는 부분기저의 안에 유한 개의 원소들의 교집합이므로, 예를 들어, 다음과 같다.

$$B = \pi_{i_1}^{-1}[G_1] \cap \pi_{i_2}^{-1}[G_2] \cap \pi_{i_3}^{-1}[G_3]$$

그래프로 보면, B는 좌표 공간 $R_{i_1}, R_{i_2}, R_{i_3}$ 위에 있는 각 개집합 $G_{i_1}, G_{i_2}, G_{i_3}$을 통과하는 함수들로 구성된다.



Members of B

[명제 12.8] $\{(X_i, \Im_i) \mid i \in I\}$이 위상공간족일 때 집합족

$$\mathscr{B} = \left\{ \prod_{i \in I} G_i \mid G_i \in \Im_i \right\}$$

은 적집합 $X = \prod_{i \in I} X_i$ 위의 어떤 위상의 기저가 될 수 있다.

상자위상

$\left\{(X_i, \Im_i) \mid i \in I\right\}$이 위상공간족일 때 집합족 $\mathscr{B} = \left\{\prod_{i \in I} G_i \mid G_i \in \Im_i\right\}$을 기저로 갖는 적집합 $X = \prod_{i \in I} X_i$ 위의 위상을 **상자위상(box topology)** 이라 한다.

[참고] $X = \prod_{i \in I} X_i$ 위의 상자위상은 첨수집합 I 가 유한집합일 때는 적위상과 일치하지만 I 가 무한집합일 때는 적위상과 다르고, 적위상보다 더 **섬세한** 위상이 된다.

[정리12.9] 티코노프 정리

콤팩트공간들의 적공간은 콤팩트가 된다.

제13장 연결성(Connectedness)

분리된 두 집합(집합 2개)

위상공간 안의 두 집합 (A,B)는 분리되어 있다. (붙어있지 않다)

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad A \cap \overline{B} = \phi \ \wedge \ \overline{A} \cap B = \phi$$

[예제1.1] 실수공간 $\mathbb{R}$ 에서 다음 구간들을 생각하자.

$$A = (0,1),\ B = (1,2),\ C = [2,3)$$

여기에서 $\overline{A} \cap B = [0,1] \cap (1,2) = \phi$ **이고,** $A \cap \overline{B} = (0,1) \cap [1,2] = \phi$

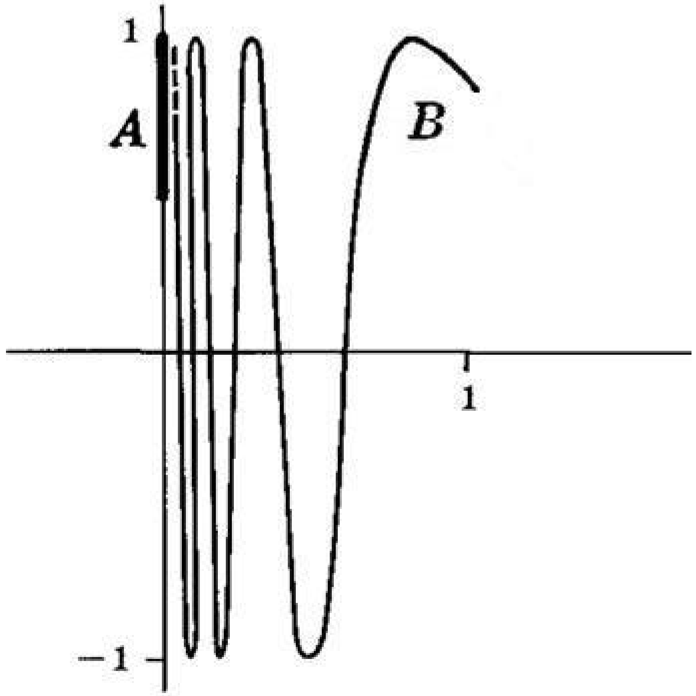
이므로 (A,B)는 분리되어 있다. 하지만 $\overline{B} \cap C = [1,2] \cap [2,3) = \{2\} \neq \phi$

이므로 (B,C)는 분리되어 있지 않다.

[예제 1.2] 평면공간 R^2의 부분집합들

$$A = \left\{(0,y) \mid \frac{1}{2} \le y \le 1\right\}$$

$$B = \left\{(x,y) \mid y = \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ 0 < x \le 1\right\}$$



에서 A의 각 원소들은 집합 B의 집적점 이므로 $A \cap \overline{B} \neq \phi$이 된다. 그러므로 집합 (A, B)는 분리되어 있지 않다.

절단(개집합의 쌍) of 집합

개집합의 쌍 (G, H)은 집합 A의 절단이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ **(1)** $A \cap G \neq \phi,\ A \cap H \neq \phi$

(2) $(A \cap G) \cap (A \cap H) = \phi$ **(또는** $(G \cap H) \subset A^c$ **)**

(3) $(A \cap G) \cup (A \cap H) = A$ **(또는** $A \subset G \cup H$ **)**

연결집합(집합 1개)

집합 A는 연결집합이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ 집합 A의 절단이 존재하지 않는다.

[주의] (1) 공집합은 연결집합이다.

(2) 단일원 집합은 연결집합이다.

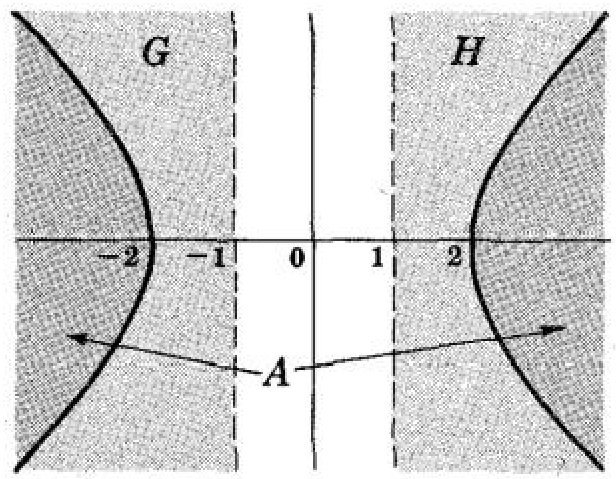
[예제2.1] 평면공간 R^2의 부분집합

$A = \{(x,y) \mid x^2 - y^2 \geq 4\}$

는 연결집합이 아니다. 왜냐하면

$G = \{(x,y) \mid x < -1\}$, $H = \{(x,y) \mid x > 1\}$

는 집합 A의 절단이다.



[예제2.2] 집합 $X=\{a,b,c,d,e\}$ 위의 위상 $\Im=\{X,\phi,\{a,b,c\},\{c,d,e\},\{e\}\}$ 에서, 집합 $A=\{a,d,e\}$ 는 비연결집합이다. 왜냐하면 $G=\{a,b,c\}$, $H=\{c,d,e\}$ 는 집합 A의 절단이기 때문이다.

[정리 13.1] 집합 A는 연결집합

$\Leftrightarrow$ A는 공집합이 아닌 분리되어 있는 두집합의 합집합이 아니다.

[정리 13.1] 집합 A는 비연결집합

$\Leftrightarrow$ A는 공집합이 아닌 분리되어 있는 두집합의 합집합이다.

(증명)

($\Longrightarrow$)[문제#2]

집합 A는 비연결집합

$\Longrightarrow$집합 A의 절단 (G,H)가 존재한다.

$\Longrightarrow$ **(1)** $A \cap G \neq \phi$, $A \cap H \neq \phi$,

(2) $(A \cap G) \cap (A \cap H) = \phi$, $(A \cap G) \cup (A \cap H) = A$

즉 $H \cap (A \cap G) = \phi$ **---(*)**

만약 $\exists p$: $p \in \overline{A \cap G}$ **,** $p \in A \cap H$

$\Longrightarrow p \in \overline{A \cap G}$ **,** $p \in H$ **(개집합)**

$\Longrightarrow$ $H \cap (A \cap G) \neq \phi$

(이유 : $p \in \overline{A \cap G} \Leftrightarrow p \in {}^{\forall} H$: 개집합, $H \cap (A \cap G) \neq \phi$**)**

$\Longrightarrow$ **모순 to (*)**

그러므로 $\overline{A \cap G} \cap (A \cap H) = \phi$

비슷하게, $(A \cap G) \cap \overline{A \cap H} = \phi$

따라서 $A \cap G$, $A \cap H$**는 공집합 아니면서(by(1)), 분리되어 있다.**

($\Longleftarrow$) **[문제#1]**

$A = B \cup C$ ($B \neq \phi, C \neq \phi$)이고 B, C가 분리된 두 집합

$\Rightarrow$ $B \cap \overline{C} = \phi$, $\overline{B} \cap C = \phi$ --(*)

$\Rightarrow$ $B \cap C = \phi$ --(**)

$G = (\overline{C})^c$, $H = (\overline{B})^c$ 로 놓으면

1) G, H 는 개집합

2) (*) $\Rightarrow$ $B \subset (\overline{C})^c$, $C \subset (\overline{B})^c$

$\Rightarrow$ $B \subset G$, $C \subset H$

$\Rightarrow A \cap G = (B \cap G) \cup (C \cap G) = B \cup \phi = B \neq \phi$

비슷하게 $A \cap H = C \neq \phi$

3) $(A \cap G) \cap (A \cap H) = B \cap C = \phi$ by (**)

4) $(A \cap G) \cup (A \cap H) = B \cup C = A$

그러므로 (G, H)는 A의 절단이다. 즉 A는 비연결집합이다. ■

[문제#4] (G,H) **가** A**의 절단이고,** B가 **연결집합이고** A**의 부분집합이면,**

$B \subset G$ **또는** $B \subset H$ **이다.**

(증명)

(G,H) **가** A**의 절단**

$\Rightarrow A \subset G \cup H$ **,** $G \cap H \subset A^c$

$\Rightarrow B \subset G \cup H$ **,** $G \cap H \subset B^c$ **(이유:** $B \subset A$**,** $A^c \subset B^c$**)**

B**가 연결집합이므로** (G,H)**가** B**의 절단이 아니라면, (3가지 조건중)**

$B \cap G = \phi$ **v** $B \cap H = \phi$**이다. 즉** $B \subset G^c$ **v** $B \subset H^c$

그런데 $B \subset G \cup H$ **이므로** $B \subset H$ **v** $B \subset G$ **이다.** ■

[명제 13.2] 집합 A, B**가 연결집합들이고 분리되지 않았다면,**

$A \cup B$**도 연결집합이다.**

(증명) 대우로 증명.

만약 $A\cup B$ 가 연결집합이 아니면 $A\cup B$의 절단 (G,H)가 존재한다.

(1) (G,H)가 $A\cup B$의 절단

$\Rightarrow$(a) $(A\cup B)\cap G\neq\phi$, $(A\cup B)\cap H\neq\phi$ ---(*)

(b) $(G\cap H)\subset(A\cup B)^c$

$\Rightarrow(G\cap H)\cap(A\cup B)=\phi$ --(**)

$\Rightarrow((G\cap H)\cap A)\cup((G\cap H)\cap B)=\phi$ by 분배법칙

$\Rightarrow(G\cap H)\cap A=\phi$ ∧ $(G\cap H)\cap B=\phi$

$\Rightarrow(A\cap G)\cap H=\phi$ ∧ $(B\cap H)\cap G=\phi$--(***) by 결합법칙

(2) (G,H)가 $A\cup B$의 절단 ∧ A, B 는 각각 연결집합

$\Rightarrow$ $(A\subset G$ ∨ $A\subset H)$ ∧ $(B\subset G$ ∨ $B\subset H)$ by [문제#4]

(3) $A,B\subset G$

$\Rightarrow$ $A\cup B\subset G$

$\Rightarrow$ $A\cup B=(A\cup B)\cap G$

$\Rightarrow$ $(A\cup B)\cap H = (A\cup B)\cap G\cap H$ **by 양변에** $\cap H$

$\Rightarrow$ $(A\cup B)\cap H = \phi$ **since** $(A\cup B)\cap(G\cap H) = \phi$ **by(**)**

$\Rightarrow$ **모순 to (*)**

$A,B\subset H$ **인 경우도 모순, 그러므로** $A\subset G$ **이면** $B\subset H$ **by(2)**

(4) **(** $A\subset G$ **∧** $B\subset H$ **)** $\Rightarrow$ **(** $A\cap G = A$ **∧** $B\cap H = B$ **)**

(5) $(A\cap G)\cap H = \phi$ **∧** $(B\cap H)\cap G = \phi$ **by(***)**

$\Rightarrow (A)\cap H = \phi$ **∧** $(B)\cap G = \phi$ **by(4)**

$\Rightarrow$**(a)** $(A\cup B)\cap G \overset{\text{분배법칙}}{=} (A\cap G)\cup(B\cap G) \overset{(4)}{=} A\cup\phi = A$

(b) $(A\cup B)\cap H \overset{\text{분배법칙}}{=} (A\cap H)\cup(B\cap H) \overset{(4)}{=} \phi\cup B = B$

$\Rightarrow (A\cup B)\cap G = A$ **∧** $(A\cup B)\cap H = B$

(6) **(**G,H**)가** $A\cup B$**의 절단**

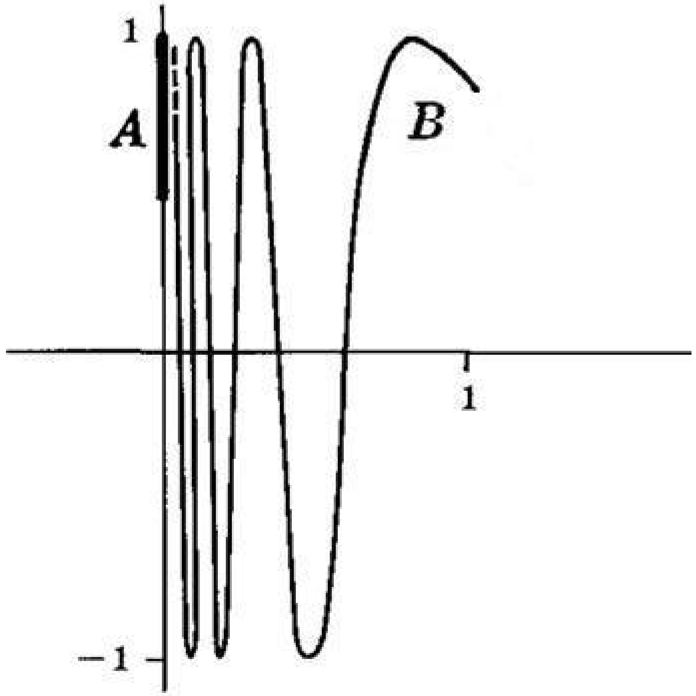
$\Rightarrow \underbrace{(A\cup B)\cap G}_{=A}$ **와** $\underbrace{(A\cup B)\cap H}_{=B}$ **는 분리됨. by [문제#2의 증명]**

■

[예제 2.3] 평면공간 R^2 의 부분집합들

$$A = \left\{ (0, y) \mid \frac{1}{2} \le y \le 1 \right\}$$

$$B = \left\{ (x, y) \mid y = \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ 0 < x \le 1 \right\}$$



에서 A, B 는 각각 연결집합인데, [예제2.1] 에서 분리되어 있지 않음을 보였다.

그러므로 [명제13.2]에 의하여 $A \cup B$ 는 연결집합이다.

[정리 13.3] 위상공간 $(X, \Im)$ 의 부분집합 A 에 대하여,

A 가 $\Im$ 에 관하여 연결집합 $\Leftrightarrow$ A 가 상대위상 $\Im_A$ 에 관하여 연결집합

그러므로 연결성은 콤팩트성처럼(정리11.2) 집합의 절대적성질이다.

[예제3.1]

X가 비연결공간

$\Leftrightarrow$ X의 절단 (G, H)이 존재

$\Leftrightarrow$ $\exists$ 개집합 G, H : (1) $G \neq \phi, H \neq \phi$

(2) $X \subset G \cup H,\ G \cap H \subset X^c$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ 개집합 G, H : (1) $G \neq \phi, H \neq \phi$

(2) $X = G \cup H,\ G \cap H = \phi$

[정리 13.4]

위상공간 X가 연결공간

$\Leftrightarrow$ X는 공집합 아닌 서로소인 개집합들의 합집합이 될 수 없다.(예제3.1)

$\Leftrightarrow$ 개집합이면서 동시에 폐집합인 집합인 진부분집합이 없다.

$\Leftrightarrow$ X, ϕ 가 개집합이면서 동시에 폐집합인 유일한 집합이다.

[예제3.2] 집합 $X = \{a,b,c,d,e\}$ 위에 위상

$$\Im = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$ 이 주어졌다.

X는 비연결공간이다. 왜냐하면 $\{a\}^c = \{b,c,d,e\}$ 이므로 $\{a\}$ 는 공집합이 아니면서 개집합이면서 동시에 폐집합이기 때문이다. 즉 ($\{a\}$,$\{b,c,d,e\}$) 은 X의 절단이다. $A = \{b,d,e\}$ 위의 상대위상 $\Im_A = \{A, \phi, \{d\}\}$ 에서 개집합이면서 동시에 폐집합이 되는 것은 A와 ϕ 밖에는 없다. 그러므로 A는 연결공간이다. 또한 A는 X에서 연결집합이다.

[예제3.3] 보통위상을 가진 실수공간은 연결공간이다. 왜냐하면 개집합 이면서 동시에 폐집합인 집합이 실수와 공집합밖에 없기 때문이다.

[정리 13.5] 연결집합의 연속함수의 상(image)도 연결집합이다.

(증명)

$f: X \to Y$ **를 연속함수라고 하고,** X**를 연결공간이라고 하자.**

$f[X]$ **가 비연결공간**

$\Longrightarrow$ $\exists$ **개집합** G, H **: (1)**$G \neq \phi, H \neq \phi$ **(2)** $G \cap H = \phi$**,**

(3) $f[X] = G \cup H$

$\Longrightarrow$ f**가 연속함수이므로,** $f^{-1}[G], f^{-1}[H]$ **는 개집합,**

(1) $f^{-1}[G] \neq \phi,\ f^{-1}[H] \neq \phi$

(2) $f^{-1}[G] \cap f^{-1}[H] = f^{-1}[G \cap H] = \phi$

(3) $f^{-1}[G] \cup f^{-1}[H] = f^{-1}[G \cup H] = f^{-1}[f[X]] = X$

$\Longrightarrow$ X**가 비연결공간** ■

[보조정리 13.6]

위상공간 X가 연결공간

$\Leftrightarrow$ X에서 이산위상공간 $Y=\{0,1\}$으로 가는 연속함수는 상수함수.

(증명)

($\Rightarrow$) $f: X \to Y=\{0,1\}$를 연속함수라고 하자.

X가 연결공간이면 $f[X]$도 이산공간 Y에서 연결집합이다. by정리13.5

그러므로 $f[X]=\{0\}$ 또는 $f[X]=\{1\}$

($\Leftarrow$) X가 비연결공간

$\Rightarrow$ $\exists$ 개집합 G,H : (1) $G \neq \phi$, $H \neq \phi$

(2) $G \cap H = \phi$, $G \cup H = X$

$$\Rightarrow \quad f(x)=\begin{cases} 0, \text{ if } x \in G \\ 1, \text{ if } x \in H \end{cases}$$

은 연속함수인데 상수함수가 아니다. ■

[정리 13.7]

E : 두 점 이상을 포함한 실수공간의 부분집합일 때,

$$E\text{는 연결집합} \Leftrightarrow E\text{는 구간}$$

(증명생략)

[정리 13.8]

X는 연결집합이고, $f : X \to \mathrm{R}$가 연속함수이면, f는 임의의 두 값 사이의 모든 값을 취한다.

(증명)

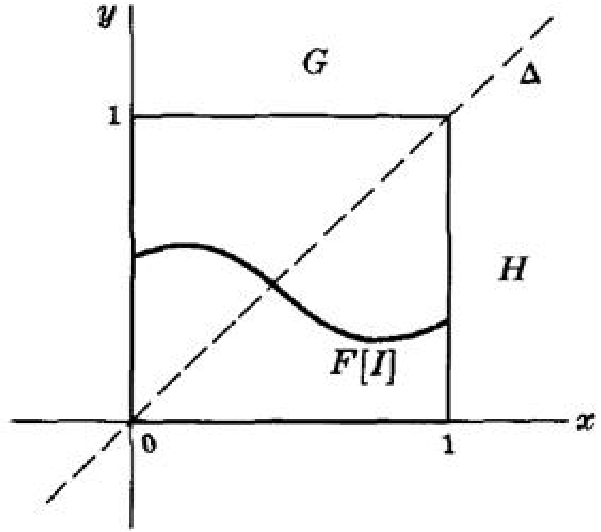
X가 연결집합이고 f가 연속함수이므로 $f(X)$도 연결집합인 실수공간의 부분집합이다. 따라서 $f(X)$는 구간이다. $f(X)$가 구간이면 $y_{1,} y_2 \in f(X)$, $y_1 < y < y_2$ 라 하면 $y \in f(X)$ 이다.

즉 f는 임의의 두 값 사이의 모든 값을 취한다. ■

[예제4.1] **부동점존재정리**

$f: I \to I$ **(**$I = [0,1]$**)이 연속함수이면** $\exists\, p \in I$ **:** $f(p) = p$

(증명)



$F: I \to \mathrm{R}^2, F(x) = (x, f(x))$ **도 연속임을 보이자.** R^2**의 임의의 기저원소**

$A = (a,b) \times (c,d)$**에 대하여,**

$$\begin{aligned} F^{-1}[A] &= \{x \mid (x, f(x)) \in A\} \\ &= \{x \mid a < x < b,\ c < f(x) < d\} \\ &= \{x \mid a < x < b\} \cap \{x \mid c < f(x) < d\} \\ &= (a,b) \cap f^{-1}[(c,d)] \end{aligned}$$ **: 개집합**

그러므로 F **는 연속함수이다. 따라서** $F(I)$**는 연결집합이다.**

$G = \{(x,y) \mid x < y\}$, $H = \{(x,y) \mid y < x\}$**로 놓으면,** G, H**는** R^2**에서**

개집합들이고, $(0,f(0))\in G$, $(1,f(1))\in H$, $G\cap H=\phi\subset(F(I))^c$이다.

따라서 만약 $F(I)\subset G\cup H$ 이라면, (G,H)는 $F(I)$의 절단이 되어

$F(I)$가 연결집합이라는 사실에 어긋난다.

그러므로 $F(I)\not\subset(G\cup H)$

$\Rightarrow \exists\, p\in I$: $F(p)\notin G\cup H$

$\Rightarrow\ (p,f(p))\notin(G\cup H)$ (이유: $F(p)=(p,f(p))$)

$\Rightarrow$ ($p<f(p)$ ∨ $p>f(p)$) 이 아니다.

$\Rightarrow\ p=f(p)$ ■

연결성분

E가 위상공간 X의 **연결성분**

정의

$\Leftrightarrow$ ($E\subset A$이고 A가 연결집합 $\Rightarrow$ $E=A$)

$\Leftrightarrow$ E는 극대연결집합.

[문제#7] $\mathcal{A} = \{A_i\}$ **가** $D = \cap_i A_i \neq \phi$ **인 연결집합들의 족이면**

$A = \cup_i A_i$ **는 연결집합이다.**

(증명)

A **가 비연결집합**

$\Longrightarrow$ $\exists$ **절단** (G, H) **of** A **:** $G \cap H \subset A^c$

$\Longrightarrow$ $\forall i,\ A_i$ **는 연결집합이므로, by [문제#4],** $A_i \subset G$ or $A_i \subset H$

$B = \cup \{A_i \mid A_i \subset G\}$, $C = \cup \{A_i \mid A_i \subset H\}$

$\Longrightarrow$ $D \subset B \cap C$ **(이유:** $D = \cap_i A_i$ **)**

$\Longrightarrow$ $D \subset G \cap H$ **(이유:** $B \subset G,\ C \subset H$**)**

$\Longrightarrow$ $D \subset A^c$ **(이유:** $G \cap H \subset A^c$**)**

$\Longrightarrow$ $\cap_i A_i \subset (\cup_i A_i)^c$ **모순!! (주의:** $\cap_i A_i \neq \phi$ **)**

그러므로 A **는 연결집합이다.** ■

[문제#15] p354

위상공간 X**에서,** $p \in X$**,** $\mathcal{A}_p = \{A \mid p \in A$ **: 연결집합** $\}$**일 때,**
$C_p = \cup \mathcal{A}_p$ **는** X**의 연결성분이다.**

(증명)

1) $\phi \neq \{p\} \subset \cap \mathcal{A}_p$ **이므로 by문제#7,** $C_p = \cup \mathcal{A}_p$ **는 연결집합이다.**

2) D**가 연결집합,** $C_p \subset D$

$\Rightarrow$ D**가 연결집합,** $p \in D$

$\Rightarrow$ $D \in \mathcal{A}_p$

$\Rightarrow$ $D \subset C_p$ **(이유:** $C_p = \cup \mathcal{A}_p$ **)**

$\Rightarrow$ $D = C_p$ **(이유:** $C_p \subset D$ **)**

그러므로 C_p**는 연결성분이다.** ■

[정리13.9]

위상공간 X의 연결성분들은 X위에 분할을 만든다.

(증명)

C_p를 점 p를 포함한 모든 연결집합들의 합집합이라고 하자.

1) 집합족 $\mathcal{C} = \{C_p \mid p \in X\}$는 모든 연결성분들의 집합이다. 왜냐하면 D가 연결성분이면 어떤 점 p를 포함할 것이고, 그럼 $D \subset C_p$이고 D가 연결성분이므로, 정의에 따라, $C_p = D$이다.

2) $X = \cup \{C_p \mid p \in X\} = \cup \mathcal{C}$

3) $\exists x \in C_p \cap C_q \Rightarrow x \in C_p$, $x \in C_q$

$$\Rightarrow C_p \subset C_x, \ C_q \subset C_x$$

$$\Rightarrow C_p = C_x, \ C_q = C_x$$ (C_p,C_q:연결성분,C_x:연결집합)

$$\Rightarrow C_p = C_q$$

그러므로 $C_p \neq C_q \Rightarrow C_p \cap C_q = \phi$ ■

[예제5.1] X가 연결공간이면 X는 하나의 성분, 즉 자기 자신 X를 갖는다.

[예제5.2] $X=\{a,b,c,d,e\}$, $\mathfrak{I}=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$

일 때, X의 연결성분은 $\{a\}$와 $\{b,c,d,e\}$이다. $A=\{b,d,e\}$는 연결집합 (예제3.2참조)인데, 연결성분 $\{b,c,d,e\}$의 부분집합이다.

[문제#8] A가 연결집합이고 $A\subset B\subset \overline{A}$이면, B도 연결집합이다.

(증명) B가 비연결집합

$\Rightarrow$ B는 절단 (G,H)을 갖는다.

$\Rightarrow$ 1) $B\cap G\neq\phi$, $B\cap H\neq\phi$ (*), $(B\cap G)\cap(B\cap H)=\phi$ (**)

2) $A\subset G$ 또는 $A\subset H$, (이유: A가 연결집합 in [문제#4])

a) $A\subset G$ $\Rightarrow$ $A\subset(B\cap G)$ by $A\subset B$

$\Rightarrow$ $A\subset H^c$ (이유: (**)$\Rightarrow(B\cap G)\cap H=\phi\Rightarrow(B\cap G)\subset H^c$)

$\Rightarrow$ $A\subset B\subset\overline{A}\subset H^c$ (이유: H^c이 폐집합)

$\Rightarrow$ $B\subset H^c$ $\Rightarrow$ $B\cap H=\phi$: 모순 to (*)

b) $A\subset H$ 일 때도 비슷하게 모순!! ■

[문제#14] 모든 연결성분은 폐집합이다.

(증명) E**를 연결성분이라 하자.**

E**는 연결집합이므로 [문제#8]에 의하여** $\overline{E}$**도 연결집합이다.**

$E \subset \overline{E}$ **이고** E**는 연결성분(극대연결집합)이므로** $E = \overline{E}$**이다.** ■

[문제#17] X, Y**가 연결공간이면** $X \times Y$**도 연결공간이다.**

(그러므로 연결공간들의 모든 유한 적공간도 연결공간이다.)

(증명)

$p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2)$**를** $X \times Y$ **의 임의의 두 점이라고 하자.**

$\{x_1\} \times Y$**는** Y**와 위상동형이므로 연결공간이다. 마찬가지로** $X \times \{y_2\}$ **도 연결공간이다. 그런데** $(\{x_1\} \times Y) \cap (X \times \{y_2\}) = \{(x_1, y_2)\} \neq \phi$ **이므로, by [문제#7],** $(\{x_1\} \times Y) \cup (X \times \{y_2\})$ **은 연결집합이다. 따라서** p, q**는 한 연결성분 안에 있다. 따라서** $X \times Y$**는 연결집합이다.** ■

[정리13.10] 연결공간의 적공간은 역시 연결공간이다.

(증명) $\{X_i \mid i \in I\}$ **는 적공간들의 족이라 하고** $X = \Pi_i X_i$ **라 하자.**

$p = < p_i : i \in I > \in X$ **이고** E**를** p**의 연결성분이라고 하자.**

$\forall x = < x_i : i \in I > \in X$,

$x \in {}^{\forall} G = (\Pi \{X_i \mid i \neq i_1, i_2, \cdots, i_m\}) \times G_{i_1} \times \cdots G_{i_m}$ **: 기저 개집합,**

$H = (\Pi \{\{p_i\} \mid i \neq i_1, i_2, \cdots, i_m\}) \times X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_m}$ **는**

$X_{i_1} \times X_{i_2} \times \cdots \times X_{i_m}$ **와 위상동형이므로 문제#17에 의하여**

연결공간이다. $p \in H$**이므로** $H \subset E$ **(= 점** p**의 연결성분).**

그런데 명백히 $G \cap H \neq \phi$**이므로** $G \cap E \neq \phi$**이다.**

그러므로 $x \in {}^{\forall} G$ **: 기저 개집합,** $G \cap E \neq \phi$**이다. 즉** $x \in \overline{E}$ **이다.**

결론적으로 $\forall x \in X, x \in \overline{E}$**. 이것은** $X = \overline{E}$ **을 의미하는데,**

By 문제#14, $E = \overline{E}$**이므로** $X = E$ **이다. 즉** X**는 연결공간이다.** ■

[따름정리13.11] 유클리드공간 R^{m} **은 연결공간이다.**

위상공간 위의 경로

$I=[0,1]\subset \mathrm{R}$이고, X가 위상공간, $a,b\in X$일 때,

$f:I\to X$ 는 a에서 b로 가는 **경로**이다.

정의
$\Leftrightarrow$ f가 연속함수이고, $f(0)=a$, $f(1)=b$

[예제7.1] f가 **상수함수**이면 **상수경로**라고 한다.

[예제7.2] $f:I\to X$가 $a\in X$에서 $b\in X$로 가는 경로이면

$\hat{f}:I\to X,\ \hat{f}(s)=f(1-s)$ 는 b에서 a로 가는 경로이다.

[예제7.3] $f:I\to X$가 a에서 b로 가는 경로이고, $g:I\to X$가 b에서 c로 가는 경로일 때, 다음과 같이 정의되는

$$(f*g)(s)=\begin{cases} f(2s) & ,\ 0\le s\le 1/2 \\ g(2s-1), & 1/2\le s\le 1 \end{cases}$$

$f*g:I\to X$ 는 a에서 c로 가는 경로이다.

경로연결집합

위상공간 X 안의 집합 E 는 경로연결집합이다.

정의

$\Leftrightarrow \forall a,b \in E,\ \exists$ (a에서 b로 가는 경로) $f : I \to X$: $f[I] \subset E$

[정리13.12] 경로연결집합은 연결집합이다.

(증명)

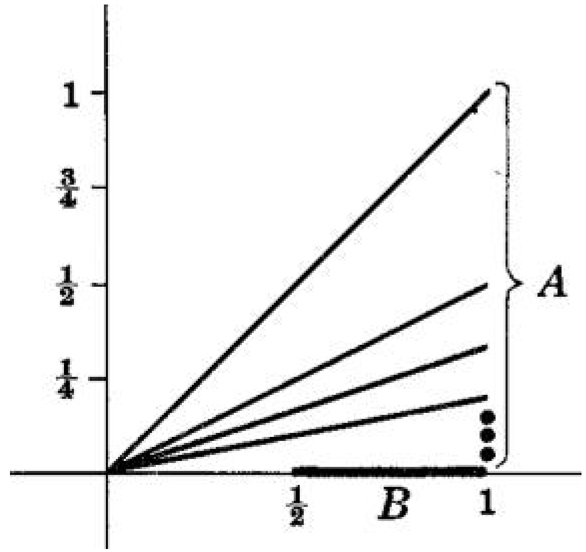
A를 경로연결집합이라고 하자. 만약 $A=\phi$이라면 A는 연결집합이다. $p \in A$라고 하자. $\forall a \in A,\ \exists$ (p에서 a로 가는 경로) $f_a : I \to A$ 이므로 $a \in f_a(I) \subset A$. 그러므로 $A = \cup\{f_a(I) \mid a \in A\}$ 이다. 그런데 $\forall a \in A,\ p \in f_a[I]$ 이다. 따라서 $\cap\{f_a(I) \mid a \in A\} \supset \{p\} \neq \phi$. 또한 $f_a(I)$은 연결집합이다. by 문제#7, $A = \cup\{f_a(I) | a \in A\}$는 연결집합이다. ■

위 정리의 역이 성립하지 않는 예는 다음과 같다.

[예제8.1]　평면 R^2 의 부분집합들

$$A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ y = x/n,\ n \in \mathbf{N}\}$$

$$B = \left\{(x,0) \mid \frac{1}{2} \le x \le 1\right\}$$

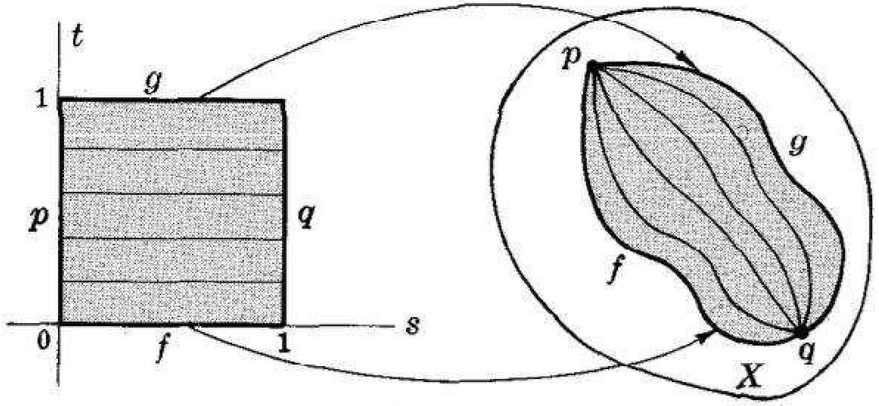


에서, A, B 는 경로연결 집합들이다. 그러므로 연결집합들이다. $B \subset \overline{A}$ 이므로 A, B 는 분리된 집합이 아니다. 그러므로 $A \cup B$ 는 연결집합이다. 그런데 A 의 어떤 점에서도 B 로 가는 경로를 만들 수 없으므로 $A \cup B$ 는 경로연결집합이 아니다.

호모토픽 경로

경로 $f: I \to X$ (위상공간)는 경로 $g: I \to X$ 와 호모토픽하다.

($f \simeq g$ 로 표시)



정의
$\Leftrightarrow$ ∃ 연속함수 $H: I^2 \to X$:

$$H(0,t) = p,\ H(1,t) = q$$

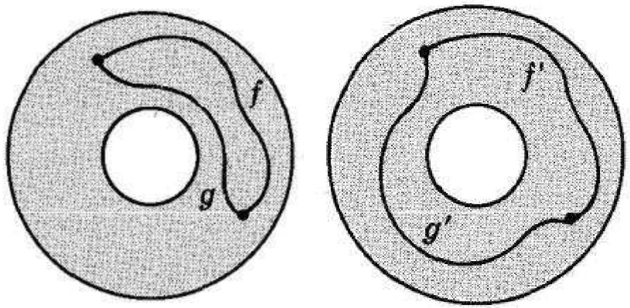
$$H(s,0) = f(s),\ H(s,1) = g(s)$$

여기에서 함수 H 를 f 에서 g 로의 호모토피라고 한다.

[예제 9.1] X 를 두 동심원 사이의 영역이라고 하자.

왼쪽 그림에서 f 와 g 는 호모토픽하지만

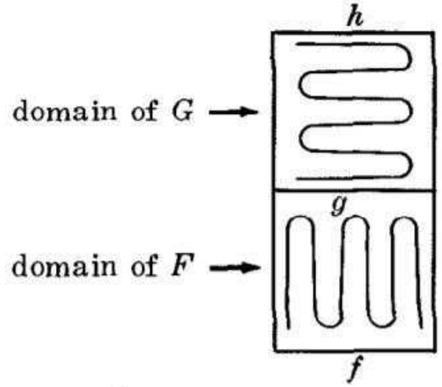
오른쪽 그림에서 f' 와 g' 는 호모토픽하지않다.



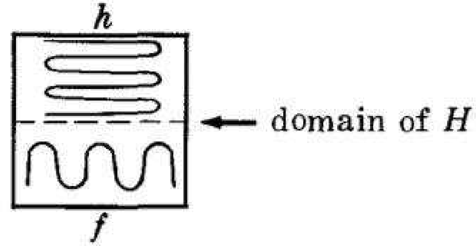
[예제 9.2] 임의의 경로 $f : I \to X$ 에서, $f \simeq f$ 이다.

왜냐하면 $H(s,t) = f(s)$ 는 f 에서 f 로 가는 호모토피이기 때문이다.

[예제 9.3] $f \simeq g$ 이면 f 에서 g 로의 어떤 호모토피 $H : I^2 \to X$ 가 존재한다. 그 때 $\hat{H}(s,t) = H(s, 1-t)$ 는 g 에서 f 로의 호모토피가 된다. 그러므로 $g \simeq f$ 가 성립한다.



[예제 9.4] $f \simeq g$, $g \simeq h$ 이면 f 에서 g 로의 호모토피 F 와 g 에서 h 로의 호모토피 G 가 존재한다. 그 때



$$\begin{aligned} H(s,t) &= F(s,2t) && \text{if } 0 \le t \le 1/2 \\ &= F(s,2t-1) && \text{if } 1/2 \le t \le 1 \end{aligned}$$

는 f 에서 h 로의 호모토피이다. 그러므로 $f \simeq h$ 이다.

[명제13.14] 한 점 a에서 다른 점 b로 가는 모든 경로들의 집합에서 호모토픽 관계는 동치관계이다.

(증명) 예제9.2 반사율, 예제9.3 대칭율, 예제9.4 추이율

닫힌경로

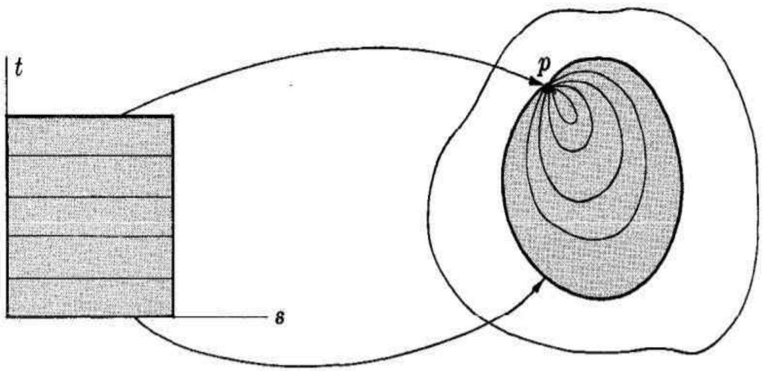
경로 $f : I \to X$는 p에서의 닫힌경로이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow} \quad f(0) = f(1) = p$$

한점으로축소가능한경로

닫힌경로 $f : I \to X$는 한점으로축소가능한 경로이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ **닫힌경로 f가 상수경로와 호모토픽하다.**



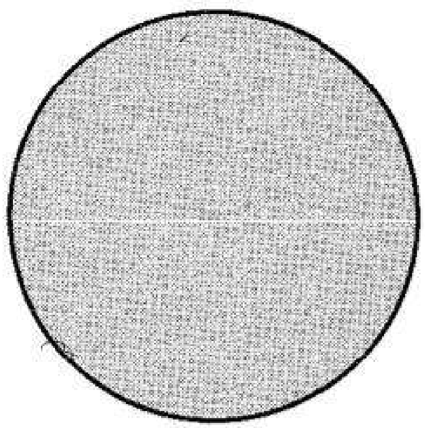
단순연결공간

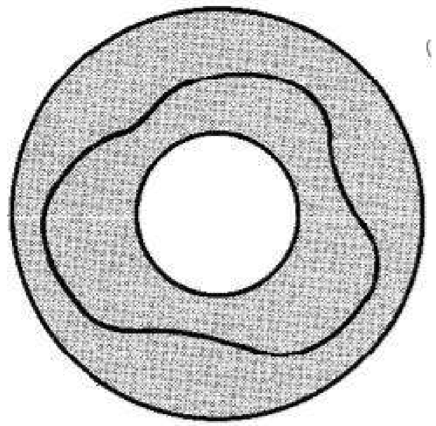
위상공간 X는 단순연결공간이다.

정의

$\Leftrightarrow$ X위의 모든 닫힌경로가 한점으로축소가능한다.

[예제 10.1] 평면 R^2 위의 원반은 단순연결공간이지만 환은 한점으로 축소되지 않은 닫힌 경로가 존재하므로 단순연결공간이 아니다.





원반: 단순연결공간(o) 환: 단순연결공간(x)

제14장 완비거리공간(Complete Metric Space)

코시열

거리공간 X의 점열$< a_1,a_2, \cdots >$은 **코시열**이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad \forall \epsilon > 0, \exists n_0 : (n,m > n_0 \Rightarrow d(a_n,a_m) < \epsilon)$$

[명제14.1] 거리공간에서 모든 수렴열은 코시열이다.

(증명)

점열$< a_n >$이 p로 수렴한다면, 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여,

$$\exists n_0 \in \mathrm{N}: (n > n_0 \Rightarrow d(a_n,p) < \varepsilon/2)$$

그러면,

$$n,m > n_0 \Rightarrow d(a_n,a_m) < d(a_n,p) + d(a_m,p)$$

$$\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

위 역은 다음 예제처럼 성립하지 않는다.

[예제1.2] 개구간 $X=(0,1)$을 보통거리를 갖는 거리공간이라 하자.

점열$< \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots >$ 은 X에서 코시열이지만, X내의 점으로 수렴하지는 않는다.

[예제1.3] 어떤 집합 X위에 자명거리 d가

$$d(a,b)=\begin{cases} 0 & \text{if } a=b \\ 1 & \text{if } a \neq b \end{cases}$$

와 같이 주어지고, 점열$< a_n >$ 이 코시열이라면

$$< a_n > = < a_1, a_2, \cdots, a_n, p, p, \cdots >$$

일 수밖에 없다. 왜냐하면 코시 조건에서 $\varepsilon = \frac{1}{2}$로 잡으면

$$\exists\, n_0 \in \mathrm{N} : (\, n, m > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \frac{1}{2})$$
$$\Rightarrow a_n = a_m \qquad \blacksquare$$

[예제1.4] 유클리드공간에서 코시열 $< p_1, p_2, \cdots >$ **, 예를 들어,**

$$p_1 = < a_1^{(1)}, \cdots, a_1^{(m)} > \text{ , } p_2 = < a_2^{(1)}, \cdots, a_2^{(m)} > \text{ , } \cdots$$

이라면, 점열$< p_n >$ **의 각 좌표 공간으로의 사영들**

$$< a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \cdots > \text{ , } \cdots \text{ , } < a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \cdots >$$

도 코시열이 된다. 왜냐하면 $\forall\, \varepsilon > 0, < p_n >$ **은 코시열이므로,**

$$\exists\, n_0 \in \mathrm{N} \;:\; (r, s > n_0 \Rightarrow d(p_r, p_s) < \varepsilon\,)$$
$$\Rightarrow \sqrt{\Sigma_{i=1}^{m} |a_r^{(i)} - a_s^{(i)}|^2} < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |a_r^{(j)} - a_s^{(j)}| \le \sqrt{\Sigma_{i=1}^{m} |a_r^{(i)} - a_s^{(i)}|^2} < \varepsilon\,,\ {}^{\forall} j$$

그러므로 점열$< a_n^{(j)} >$, ${}^{\forall} j = 1, 2, \cdots, m$**도 코시열이다.** $\blacksquare$

완비거리공간

거리공간 (X,d) 는 완비하다. 또는 완비거리공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ **X안의 모든 코시열이 X안의 한 점으로 수렴한다.**

[예제2.1] 보통거리를 갖는 실수집합 R은 완비하다.

[예제2.2] d가 어떤 집합 X상의 자명거리라고 하자. 예제1.3에 의하면, (X,d)위에서 모든 코시열은 $<a_1,a_2,\cdots,a_n,p,p,p,\cdots>$ 형식이므로 X안의 한점으로 수렴하므로, (X,d)는 완비거리공간이다.

[예제2.3] 보통거리를 갖는 단위개구간 $X=(0,1)$은 X안의 점열

$$<\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots>$$

은 코시열인데 X안의 점으로 수렴하지 않으므로, 완비공간이 아니다.

[예제2.4] 유클리드공간 R^{m}은 완비공간이다. (숙제)

[문제#2] $< a_i >$ **가 거리공간** X **안의 점열이고,**

$$A_1 = \{a_1, a_2, \cdots\}, A_2 = \{a_2, a_3, \cdots\}, \cdots$$

라고 하면, $< a_i >$ **가 코시열** $\Leftrightarrow d(A_i) \to 0$

(증명)

($\Rightarrow$ **)** $< a_i >$ **가 코시열**

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathrm{N} : (n, m > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathrm{N} : ((n > n_0,\ a_m \in A_n) \Rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathrm{N} : (n > n_0 \Rightarrow d(A_n) < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow d(A_i) \to 0$$

($\Rightarrow$ **)** $d(A_i) \to 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathrm{N} : \ (d(A_{n_0+1}) < \varepsilon)$**, 따라서,**

$$(n, m > n_0 \Rightarrow a_n, a_m \in A_{n_0+1} \Rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon)$$

$\Rightarrow < a_i >$ **가 코시열** ■

축소집합열

집합열 $< A_1, A_2, \cdots >$ 은 축소집합열이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \ A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ \cdots$$

[정리14.2] 축소폐집합열의 정리

거리공간 X가 완비하다

$\Leftrightarrow$지름이 0으로 수렴하는, 공집합 아닌 폐집합의 축소열들의 교집합은 공집합이 아니다.

[증명]

($\Rightarrow$) $< A_i >$ 을 지름이 0으로 수렴하는 공집합 아닌 폐집합의 축소열이라고 하자. $A_i \neq \phi$**이므로**

$$\exists < a_i >: a_i \in A_i, i = 1, 2, 3, \cdots$$

$d(A_i) \to 0$ **이므로**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathrm{N} : d(A_{n_0}) < \varepsilon$$

$< A_i >$ **이 축소열이므로,**

$$n, m > n_0 \;\Rightarrow\; A_n, A_m \subset A_{n_0}$$

$$\Rightarrow\; a_n, a_m \in A_{n_0}$$

$$\Rightarrow\; d(a_n, a_{m)} < \varepsilon$$

따라서 $< a_i >$ **는 코시열이다.** X**가 완비이므로** $\exists p \in X : a_i \to p$ **이다.**

$p \notin \cap_i A_i$ **이라고 가정하면,** $\exists k \in \mathrm{N}, p \notin A_k$ **이다.** A_k**가 폐집합이므로**

$\exists \delta > 0 : d(p, A_k) = \delta$ **이다. 그러므로**

$$i > k \Rightarrow a_i \in A_i$$

$$\Rightarrow a_i \notin S(p, \delta/2)$$

이것은 $a_i \to p$ **에 모순이다. 그러므로** $p \in \cap_i A_i$ **이다.**

($\Leftarrow$) $< a_i >$ **를 거리공간** X **안의 코시열이라고 가정하자.**

$$A_1 = \{a_1, a_2, \cdots\},\ A_2 = \{a_2, a_3, \cdots\},\ \cdots$$

로 놓으면 $< A_i >$ **는 축소집합열이고, By문제#2,** $d(A_i) \to 0$ **이다.**

페포들의 열 $< \overline{A_i} >$ **도 축소집합열이고,** $d(\overline{A_i}) = d(A_i) \to 0$ **이다.**

가정에 의하여 $\cap_i \overline{A_i} \neq \phi$ **이다. 그러므로** $\exists\, p \in \cap_i \overline{A_i}$ **이다.**

$d(\overline{A_i}) \to 0$ **이므로,**

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathrm{N}:\ (\ d(\overline{A_{n_0}}) < \varepsilon\ ),$$ **따라서,**

$$(\ n > n_0 \ \Rightarrow\ a_n \in A_n \subset A_{n_0},\ p \in \overline{A_{n_0}}$$

$$\Rightarrow\ d(a_n, p) < \varepsilon\ )$$

그러므로 $a_n \to p$ ■

[예제 3.1] 실수공간 $\mathbb{R}$은 완비공간이다. $A_n = [n, \infty)$라 하면, $< A_n >$ 은 축소폐집합열이다. 그런데 $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$이다. 그러므로 $d(A_n) \to 0$ 이 될 수가 없다.

[예제 3.2] 실수공간 $\mathbb{R}$은 완비공간이다. $A_n = (0, \dfrac{1}{n}]$라 하면, $< A_n >$ 은 축소집합열이고, $d(A_n) \to 0$ 이다. 그런데 $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$이다. 그러므로 A_n는 폐집합이 될 수 없다.

축소사상

함수 $f : X \to X$ 는 축소사상이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad \exists\, \alpha : 0 \le \alpha < 1, \forall\, p, q \in X,\ d(f(p), f(q)) \le \alpha\, d(p, q) < d(p, q)$$

[정리 14.3] 부동점 정리

X가 완비공간이고, $f : X \to X$가 축소사상이면 $\exists\, p \in X : f(p) = p$이다.

완비화

거리공간 X^* 는 거리공간 X의 완비화이다.

정의
$\Leftrightarrow$ X가 X^* 의 조밀부분집합과 거리동형이다.

[예제 5.1] 실수공간 R은 유리수공간 Q의 완비화이다. 왜냐하면, R은 완비공간이고, $\overline{\mathrm{Q}} = \mathrm{R}$이기 때문이다.

완비화 방법

거리공간 X위의 모든 코시열들의 집합을 $C[X]$라 하자. 그러면

$$< a_n > \sim < b_n > \ \Leftrightarrow \ d(a_n, b_n) \to 0$$

로 정의되는 관계 $\sim$ 는 $C[X]$위의 동치관계이다. 몫집합 $X^* \equiv (C[X]/\sim)$위에 거리 함수를

$$e(< a_n >, < b_n >) = \lim_{n \to \infty} d(a_n, b_n)$$

로 정의하면 함수 e는 X^* 위에 잘 정의된 거리임을 보일 수 있다.

또한 X는 X^* 안에 조밀한 집합과 거리동형임을 보일 수 있다. 즉 X^*는 X의 완비화가 된다. 더불어 모든 완비화들은 서로 거리동형이다.

[예제] 실수집합은 유리수집합의 완비화로 정의될 수 있다. 즉

$$\mathrm{R} = \{ < a_n > \mid < a_n > \text{ 는 Q 안의 코시열 } \} \qquad \blacksquare$$

조밀한 곳이 없다(nowhere dense)

위상공간의 부분집합 A는 조밀한 곳이 없다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad (\overline{A})^o = \phi$$

위상공간의 부분집합 A는 조밀한 곳이 있다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad (\overline{A})^o \neq \phi$$

[예제 6.1]

(1) 정수집합 Z는 실수공간 R에서 조밀한 곳이 없는 부분집합이다.

왜냐하면 $\overline{\mathrm{Z}}=\mathrm{Z}$ 이므로 $(\overline{\mathrm{Z}})^{\circ}=(\mathrm{Z})^{\circ}=\phi$ 이기 때문이다.

(2) 실수공간 R 의 모든 유한부분집합은 (1)에서 처럼 조밀한 곳이 없다.

(3) 유리수집합 Q 는 실수공간 R 에서 조밀한 곳이 있는 부분집합이다.

왜냐하면 $(\overline{\mathrm{Q}})^{\circ}=(\mathrm{R})^{\circ}=\mathrm{R}\neq\phi$ 이기 때문이다. ■

제1범주, 제2범주

위상공간 X 는 **제1범주**에 속한다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ X 는 가산개의, 조밀한 곳이 없는 부분집합들의, 합집합이다.

위상공간 X 는 **제2범주**에 속한다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ X 는 가산개의, 조밀한 곳이 없는 부분집합들의, 합집합이 아니다.

[정리 14.11]

완비거리공간은 제2범주에 속한다. (증명생략)

[문제#4] 코시열의 부분열이 한 점 p로 수렴하면, 코시열도 p로 수렴한다.

(증명)

코시열 $<a_n>$ 의 부분열 $<a_{n_i}>$ 이 p로 수렴한다고 가정하자.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists i_0 \in \mathrm{N}: (i > i_0 \Rightarrow d(a_{n_i}, a_{n_{i_0}}) < \varepsilon/2)$ **by** $a_{n_i} \rightarrow p$

$\exists n_0 \in \mathrm{N}: (n, m > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon/2)$ **by 코시열**

여기에서 $\exists m > n_0$, $m = n_i$, $i > i_0$) **이다.**

그러므로 $d(a_n, p) \leq d(a_n, a_m) + (a_{n_i}, p)$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

그러므로 점열 $<a_n>$ 은 p로 수렴한다. ■

[정리 14.12]

거리공간 X는 콤팩트이다.

$\Leftrightarrow$ **X는 완전유계이고, 완비공간이다.**

(증명)

($\Longrightarrow$)

(1) [정리 11.14]에 의하면 X가 콤팩트이면 점열콤팩트이고,
[보조정리 11.17]에 의하며 점열콤팩트이면 완전유계이다.

(2) 임의의 코시열이 있다면, 그 점열은 점열콤팩트공간에서는 수렴하는 부분열을 갖는다. 그런데 By [문제#4], 코시열은 수렴하는 부분열의 극한으로 수렴한다. 코시열이 수렴하므로 완비공간이다.

($\Longleftarrow$)

점열$\langle a_i \rangle$ 이 X 안에 있다고 하자. X가 완전유계이면,

by [명제 11.15], 지름이 $\varepsilon_1 = 1$보다 작은 유한 개의 부분집합으로 분할 할 수 있고, 그 부분집합들 중에 점열$\langle a_i \rangle$의 무한 개의 항을 포함하는 집합 (예를 들어 A_1)이 적어도 하나 존재한다. 따라서

$$\exists\, i_1 \in \mathrm{N} : a_{i_1} \in A_1$$

이다. 그런데 A_1 도 완전유계이므로, 지름이 $\varepsilon_1 = 1/2$ 보다 작은 유한 개의 부분집합으로 분할 할 수 있고 그 부분집합들 중에 점열 $< a_i >$의 무한 개의 항을 포함하는 집합 (예를 들어 A_2)이 적어도 하나 존재한다. 따라서

$$\exists\, i_2 \in \mathrm{N} : (a_{i_2} \in A_2 \ ,\ i_2 > i_1)$$

이다. 여기서 $A_1 \supset A_2$ 이다. 이런 방법으로 계속하면, $d(A_n) < 1/n$ 인 축소집합열

$$A_1 \supset A_2 \supset \ \cdots$$

과 $a_{i_n} \in A_n$ 인 $< a_i >$ 의 부분열 $< a_{i_n} >$ 을 얻는다. 그러면

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ , \ \exists\, n_0 \in \mathrm{N} : \left(1/n_0 < \varepsilon, d(A_{n_0}) < 1/n_0\right)$$

그러므로

$$n, m > n_0 \ \Rightarrow i_n, i_m > i_{n_0}$$

$$\Rightarrow a_{i_n}, a_{i_m} \in A_{n_0}$$

$$\Rightarrow d(a_{i_n}, a_{i_m}) < 1/n_0 < \varepsilon$$

X가 완비공간이므로 코시 부분열 $< a_{i_n} >$ 은 수렴한다. 수열 $< a_i >$ 이 수렴하는 부분열을 가지므로 X는 점열콤팩트이다.

By [정리 11.14], 점열콤팩트이면 콤팩트이다. ■

[정리 14.13]

집합 A가 완비거리공간 X의 부분집합일 때,

A 는 콤팩트 $\Leftrightarrow$ (A 는 완전유계이고, 폐집합이다.)

($\Rightarrow$)

By [정리 11.5], A가 콤팩트집합이면 A는 폐집합이다.

By [정리 11.14], A가 콤팩트이면 점열콤팩트이고,

By [보조정리 11.17], 점열콤팩트이면 완전유계이다.

($\Leftarrow$)

A위의 임의의 코시열은 X위의 코시열이고, X가 완비이므로, X위의 어떤 점으로 수렴한다. A가 폐집합이면 A위의 점열의 극한을 포함한다. 그러므로 A도 완비공간이 된다. 더불어 A가 완전유계이라면, By [정리 14.12], A는 콤팩트가 된다. ■

$$(x_1,x_2,x_3) \in (X_1 \times G_2 \times X_3) \cap (X_1 \times X_2 \times G_3)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x_1,x_2,x_3) \in (X_1 \times G_2 \times X_3) \ \wedge \ (x_1,x_2,x_3) \in (X_1 \times X_2 \times G_3)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x_1 \in X_1 \ \wedge \ x_2 \in G_2 \ \wedge \ x_3 \in X_3) \wedge \ (x_1 \in X_1 \ \wedge \ x_2 \in X_2 \ \wedge \ x_3 \in G_3)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x_1 \in X_1 \ \wedge \ x_2 \in G_2 \ \wedge \ x_3 \in X_3 \ \wedge x_1 \in X_1 \ \wedge \ x_2 \in X_2 \ \wedge \ x_3 \in G_3$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x_1 \in X_1 \ \wedge \ x_2 \in G_2 \ \wedge \ x_3 \in G_3$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x_1,x_2,x_3) \in (X_1 \times G_2 \times G_3)$$