위상수학 1학기

김상배 교수 : xxx@hnu.kr

http://sbk.hnu.kr/Lectures

010-XXXX-7867

문자메세지, 카톡(공부내용 질문)

교과서 : Schaum's Outlines

일반위상수학, 이장우역, 경문사

수학 : 수와 도형

1) 도형 : 기하학

고대 이집트, 그리이스 플라톤의 아카데미, 유클리드 `원론'

2) 수 : 자연수, 정수, 유리수, 무리수, 복소수

약수와 배수, 솟수(prime number), 정수론

방정식 : 미지수로 등식을 만든다.

대수학 : (대수=숫자를 대신 한 것 =문자=미지수)

방정식 풀기, 아벨, 갈르와-> 현대대수

3) 좌표 : 데카르트 (400년전 쯤), 해석기하학의 창시자

해석학: 무한히 ~ 한다. 함수

연속, 미분, 적분, 급수, 미분기하

4) 집합 : 실수집합을 기초로 추상구조로 확장됨.

수학 : 실수집합의 성질(대수,기하,해석)을 연구한다.

실수집합의 3가지 구조 : 연산구조, 순서구조, 연결구조

1) 연산(대수): 덧셈과 곱셈. 방정식 해법

2) 순서 : 전순서, 부분순서

3) 연결(위상) : 수렴. 연속. 해석기하

위상수학 : `연속’을 주제로 연구, 기하학과 연관.

위상수학을 위한 기초:

집합, 명제, 함수, 가산집합 에 대한 기초가 필요하다.

집합족 : $I = \{1,2\}$, $\{A_i\}_{i \in I}$

$$\begin{array}{ll} \forall\, i \in I,\ x \in A_i & \exists\, i \in I :\ x \in A_i \\ \Leftrightarrow x \in A_1 \text{ and } x \in A_2 & \Leftrightarrow x \in A_1 \text{ or } x \in A_2 \\ \Leftrightarrow x \in A_1 \cap A_2 & \Leftrightarrow x \in A_1 \cup A_2 \\ \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i & \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} A_i \end{array}$$

드모르간의 법칙

$$(A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c \qquad (A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c$$

일반화된 드모로간의 법칙을 증명하라

1) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$ 2) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$

증명)

1) $x\in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c$

$\Leftrightarrow \sim \left(x\in \bigcap_{i\in I} A_i\right)$

$\Leftrightarrow \sim \left(\forall i\in I, x \in A_i\right)$

$\Leftrightarrow \exists i\in I : x\notin A_i$

$\Leftrightarrow \exists i\in I : x\in A_i^c$

$\Leftrightarrow x\in \bigcup_{i\in I} A_i^c$

2) (숙제)

p and q → p (O)

철수와 영희는 학교에 갔습니다.

→ 철수는 학교에 갔습니다. (O)

p or q → p (X)

철수 또는 영희는 학교에 갔습니다.

→ 철수는 학교에 갔습니다. (X)

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(1)철수가 학교에 출석하면 영희도 출석한다.

(2)철수가 학교에 출석 안했거나, 영희가 출석하고 있다.

(3)영희가 출석하지 않으면, 철수가 출석하지 않는다.

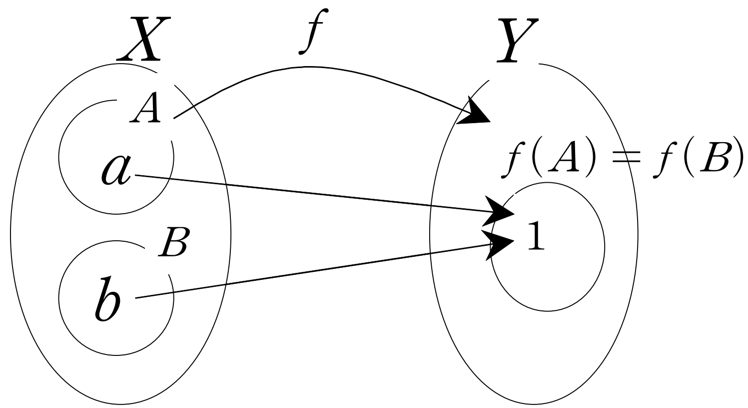
$(1) p \to q \equiv (2) \sim p \vee q \equiv (3) \sim q \to \sim p$ **: 3개의 진리표가 같다.**

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

$$f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$$
$$f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$$
$$f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$$



$$(f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}$$

함수 $f: X \to Y$ **, 정의역, 공변역, 대응규칙**

전사함수 : $\forall y \in Y, \exists x \in X: f(x) = y$

단사함수 : $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

역함수 f^{-1} **가 존재 <=>** f**: 전단사함수**

가부번집합 = 번호를 붙일 수 있는 집합 (denumerable set)

= 자연수집합과 일대일 대응이 되는 집합

가산집합 = 세어나갈 수 있는 집합 (countable set)

= 유한집합 또는 가부번집합 (finite or denumerable)

(숙제) 1) 유리수와 무리수의 차이는 무엇일까?

2) 유리수집합이 가산집합임을 보여라.

제4장 직선과 평면의 위상

실해석학에서의 위상개념 (p 86)

실수집합 : 양끝이 무한히 뻗어가는 한 줄은 끈과 같은 모양.

개구간 = (a, b) = $\{x \in \mathrm{R} \mid a < x < b\}$: "연결" 의 기본단위(?)

개집합(열린집합) = 개구간들의 합집합으로 표시되는 집합

: "연결"상태 (붙은상태 or 떨어진 상태)의 도구

위상 = 모든 개집합들을 모은 집합 : 전체 연결 상태의 정보를 갖음.

[정리1] 개집합들의 임의 개의(특히 무한 개의) 합집합은 개집합이다.

(증명)

$\{G_i\}_{i \in I}$ 를 개집합들의 족(family)이라고 하자. 즉 개집합들의 집합.

$\forall i \in I,\ G_i$ 는 개집합이므로, 개구간들의 합집합으로 표시된다.

즉 $(\exists$ 개구간들 $(a_{i,j}, b_{i,j}) \wedge \exists J_i) : G_i = \bigcup_{j \in J_i} (a_{i,j}, b_{i,j})$

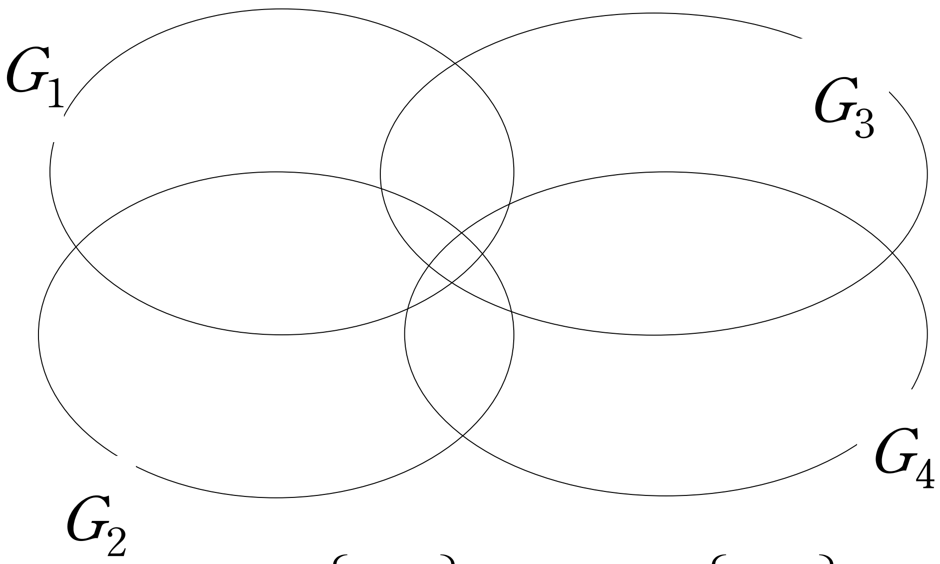
그러면 $\cup_{i\in I} G_i = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i}(a_{i,j}, b_{i,j})$ **, 즉 합집합의 합집합.**

$$= \bigcup_{k\in J}(a_k, b_k)$$

여기서 $J = \cup_{i\in I} J_i$ **이다. 합집합의 합집합은 합집합이 된다.**

따라서 $\cup_{i\in I} G_i$ **는 개구간들의 합집합이다. 즉 개집합이다.** ■

[예시]



$J_1 = \{1,2\}$ $\quad$ $J_2 = \{3,4\}$

$J = J_1 \cup J_2 = \{1,2,3,4\}$

$$\left(\bigcup_{i\in J_1} G_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in J_2} G_i\right)$$
$$= (G_1 \cup G_2) \cup (G_3 \cup G_4)$$
$$= G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$
$$= \bigcup_{i\in J} G_i$$

[정리2] 개집합들의 유한개의 교집합은 개집합이다. (2개의 경우->유한개 경우로 쉽게 확장)

(증명) $x \in \left(\bigcup_{i \in I} I_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} J_j \right)$ **: 개구간들의 합집합들의 교집합**

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} I_i \ \wedge \ x \in \bigcup_{j \in J} J_j$$

$$\Leftrightarrow \exists\, i_0 \in I : x \in I_{i_0} \ \wedge \ \exists\, j_0 \in J : x \in J_{j_0}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, i_0 \in I,\ \exists\, j_0 \in J : \ x \in (I_{i_0} \cap J_{j_0})$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I, j \in J} (I_i \cap J_j)$$

그러므로 $\left(\bigcup_{i \in I} I_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} J_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (I_i \cap J_j)$ **이고 개구간들의 교집합** $(I_i \cap J_j)$**들은 다시 개구간이 되므로** $\bigcup_{i \in I, j \in J} (I_i \cap J_j)$**은 개집합이다.**

따라서 개구간들의 합집합인 두 개집합들의 교집합 $\left(\bigcup_i I_i \right) \cap \left(\bigcup_j J_j \right)$ **은** $\bigcup_{i \in I, j \in J} (I_i \cap J_j)$**과 같은 집합이므로 개집합이 된다.** ■

집적점 (쌓인점:accumulation point) (극한점:limit point)

점 p를 실수의 부분집합 A의 집적점이라고 한다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ ($p\in {}^{\forall}G$ 개집합, $(G\setminus\{p\})\cap A\neq\phi$)

유도집합

실수의 부분집합 A'를 A의 유도집합이라고 한다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ A' = $\{x\in\mathrm{R}\mid x$: A의 집적점 $\}$

= 집합 A 의 모든 집적점들의 집합.

[예제] $A=\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots\right\}$의 유도집합을 구하여라.

(풀이) 다음페이지

(풀이)

(i) $p=0$ **인 경우**

점 $p=0$**을 포함하는 임의의 개집합** G**는 개구간들의 합집합**
$G=\cup_i(a_i,b_i)$**이므로,** $0\in G$**이면, 어떤 개구간** $(a_{i_0,}b_{i_0})$**이 존재하여**
$0\in(a_{i_0},b_{i_0})\subset G$ **그런데** $G\setminus\{0\}$**의 부분집합인** $(0,b_{i_0})$**는 항상**
집합 A**의 원소를 포함하므로** $(G\setminus\{0\})\cap A\neq\phi$ **이다.**
그러므로 $p=0$**는 집합** A**의 집적점이다.**

(ii) $p\in(A\cup\{0\})^c$ **인 경우**

어떤 양의 실수 ϵ**에 대하여 구간** $G=(p-\epsilon,p+\epsilon)$**이**
집합 A**와 만나지 않도록 할 수 있다. 그러므로 당연히**
$(G\setminus\{p\})\cap A=\phi$**이 되고, 따라서** p**는** A**의 집적점이 아니다.**

(iii) $p \in A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \right\}$ **인 경우**

어떤 자연수 n**에 대하여** $p = \frac{1}{n}$**일 때,**

$\epsilon_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $\epsilon_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ **이라면,**

$\epsilon_n < \epsilon_{n-1}$ **이므로, 구간** $(p - \epsilon_n, p + \epsilon_n)$**에 대하여,**

$(p - \epsilon_n, p + \epsilon_n) \cap A = \{p\}$**임을 알수 있다.**

그러므로 $G = (p - \epsilon_n, p + \epsilon_n)$**라고 하면** $(G \setminus \{p\}) \cap A = \phi$

따라서 p**는** A**의 집적점이 아니다.**

위 (i), (ii), (iii) 에 의하여 $A' = \{0\}$ **이다.** ■

[예제] 임의 실수 p**를 포함하는 모든 개집합들은** p**가 아닌 유리수를 포함하므로 유리수 집합의 유도집합은 실수집합이다. 즉** $\mathrm{Q}' = \mathrm{R}$.

[예제] 정수집합 Z**는 집적점을 갖지 않는다. 따라서** $Z' = \phi$.

[정리 4-3] 볼차노-바이어스트라스 정리

유계인 폐구간은 모든 무한 부분집합이 적어도 하나의 집적점을 갖는 집합이다.

($\Leftrightarrow$ 유계인 폐구간은 집적점 컴팩트 집합이다.)

폐집합

집합 A는 폐집합 (닫힌집합) 이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ **집합 A의 여집합 A^c이 개집합이다.**

[정리 4-4]

집합 A가 폐집합 $\Leftrightarrow$ $A' \subset A$

(증명) PDF p26 참조

[예제] 폐구간 $A=[a,b]$은 폐집합이다.

(증명) $A^c=[a,b]^c=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$

$\Rightarrow A^c$**는 개구간의 합집합**

$\Rightarrow A^c$**는 개집합의 합집합**

$\Rightarrow$ A^c**는 개집합**

$\Rightarrow$ A**는 폐집합** ■

[예제] $A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$**는 폐집합이 아니다.**

(풀이) $A'=\{0\}$**이므로** $A'\not\subset A$ **이다. 그러므로 정리 4-4에 의하여**

A**는 폐집합이 아니다.**

[예제] 실수집합 R**과 공집합** ϕ **는 폐집합이다.**

[예제] 개폐구간 $(a,b]$**는 개집합도 폐집합도 아니다.**

피복과 개피복

1) 집합족 $\{A_i\}_{i\in I}$는 집합 A의 피복(덮개)이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$$

2) 집합족 $\{A_i\}_{i\in I}$는 집합 A의 개피복이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad A \subset \bigcup_{i\in I} A_i \text{ , } (A_i \text{ : 개집합})$$

하이네-보렐 정리

유계인 폐구간 $[a,b]$은 임의의 개피복이 유한 부분피복을 갖는 집합이다.

(

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} [a,b] \subset \bigcup_{i\in I} G_i \quad (G_i \text{ :개집합}) \\ \Rightarrow \exists \; G_1, G_2, \cdots, G_n \quad : \quad [a,b] \subset G_1 \cup G_2 \cup \cdots G_n \end{array}}$$

$\Leftrightarrow$ 유계인 폐구간은 컴팩트 집합이다.)

제5장 위상공간의 정의

위상공간(Topological Space)

$X \neq \phi$의 부분집합족인 $\Im$가 다음 공리를 만족할 때 $\Im$를 X의 **위상(topology)** 이라 한다.

$$[O_1]\ X, \phi \in \Im$$
$$[O_2]\ (\forall i \in I, A_i \in \Im) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \Im$$
$$[O_3]\ (\forall i \in I(\text{유한집합}), A_i \in \Im) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \Im$$

$\Im$의 원소를 $\Im$**-개집합** 또는 그냥 **개집합(열린집합, open set)**이라 한다. $(X, \Im)$를 **위상공간**이라 한다.

[예제1.1] 실수집합 R에서 모든 개집합(=개구간들의 합집합)들의 집합인

$$\mathcal{U} = \left\{ \bigcup_i (a_i, b_i) \mid a_i, b_i \in \mathrm{R} \ \wedge \ a_i < b_i \right\}$$

는 위 3가지 조건을 만족하는데, $\mathcal{U}$를 R위의 **보통위상**이라 한다.

[예제1.2] 집합 $X=\{a,b,c,d,e\}$ **에 대하여 부분집합족,**

$$\mathfrak{I}_1=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$
$$\mathfrak{I}_2=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$$
$$\mathfrak{I}_3=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{a,b,d,e\}\}$$

$\mathfrak{I}_1$ **은 3가지 조건을 다 만족하므로 위상이 된다.**

$\mathfrak{I}_2$ **은 조건** $[O_2]$**를 만족하지 않으므로 위상이 아니다.**

$$\{a,c,d\}\cup\{b,c,d\}=\{a,b,c,d\}\notin\mathfrak{I}_2$$

$\mathfrak{I}_3$ **은 조건** $[O_3]$**를 만족하지 않으므로 위상이 아니다.**

$$\{a,c,d\}\cap\{a,b,d,e\}=\{a,d\}\notin\mathfrak{I}_3$$

[예제1.3] $\mathcal{D}=\mathcal{P}(X)$가 집합 X의 멱집합일 때, $\mathcal{D}$는 위상의 3가지 조건을 만족하는데, 이 위상을 X의 **이산위상(discrete topology)**이라 하고 $(X,\mathcal{D})$를 **이산위상공간** 또는 **이산공간(discrete space)**이라 한다.

[예제1.4] $\mathscr{I}=\{X,\phi\}$도 위상의 3가지 조건을 만족하는데 이 위상을 X의 **밀착위상(indiscrete topology)**이라 하고 $(X,\mathscr{I})$를 **밀착위상공간** 또는 **밀착공간(indiscrete space)**이라 한다.

[예제1.5] $\mathscr{F}=\left\{G\subset X\mid G^c:\text{유한집합}\right\}\cup\{\phi\}$도 위상의 3가지 조건을 만족하는데, 이 위상을 X의 **여유한위상(cofinite topology)**이라 한다.

[숙제]

1) 집합 X 위의 두 위상의 공통집합도 X위의 위상이 됨을 보여라.
2) 집합 X 위의 두 위상의 합집합은 X위의 위상이 반드시 되는 것은 아님을 보여라.

주의 : 위상의 첫째 조건 $[O_1]$은 생략될 수 있다.

(이유) $[O_2]\ \forall i \in I$: 임의집합, $A_i \in \Im \Rightarrow \cup_{i \in I} A_i \in \Im$ **에서 번호집합**

I**가 공집합이면,** $\bigcup_{i \in \phi} A_i \in \Im$ **이되고** $\phi = \bigcup_{i \in \phi} A_i$**이므로** $\phi \in \Im$

$[O_3]\ \forall i \in I$: 유한집합, $A_i \in \Im \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \Im$ **에서 번호집합**

I**가 공집합이면,** $\bigcap_{i \in \phi} A_i \in \Im$ **이되고** $X = \bigcap_{i \in \phi} A_i$**이므로** $X \in \Im$

[명제] $\phi = \bigcup_{i \in \phi} A_i$

(증명) $x \in \bigcup_{i \in \phi} A_i \Leftrightarrow \exists i \in \phi : x \in A_i \Leftrightarrow$ 거짓

[명제] $X = \bigcap_{i \in \phi} A_i$

(증명) $\forall x \in X,$

$$x \in \bigcap_{i \in \phi} A_i \Leftrightarrow \forall i \in \phi : x \in A_i$$
$$\Leftrightarrow (i \in \phi \Rightarrow x \in A_i)$$
$$\Leftrightarrow (\text{거짓} \Rightarrow x \in A_i) \Leftrightarrow \text{참}$$

집적점 (쌓인점:accumulation point) (극한점:limit point)

점 p를 부분집합 A의 집적점이라고 한다. (표시: $p \in A'$)

정의

$\Leftrightarrow$ **(** $p \in {}^{\forall}G$ **개집합,** $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi$ **)**

$\Leftrightarrow$ **(** $p \in {}^{\forall}G$ **개집합,** $G \cap (A \setminus \{p\}) \neq \phi$ **)**

그러므로

$p \in (A')^{c}$ $\Leftrightarrow$ **(** $p \in {}^{\exists}G$ **개집합 :** $G \cap (A \setminus \{p\}) = \phi$ **)**

$\Leftrightarrow$ **(** $p \in {}^{\exists}G$ **개집합 :** $(G \setminus \{p\}) \cap A = \phi$ **)**

$\Leftrightarrow$ **(** $p \in {}^{\exists}G$ **개집합 :** $G \cap A \subset \{p\}$ **)**

$\ast$

($\ast$ 증명)

$(G \setminus \{p\}) \cap A = \phi$

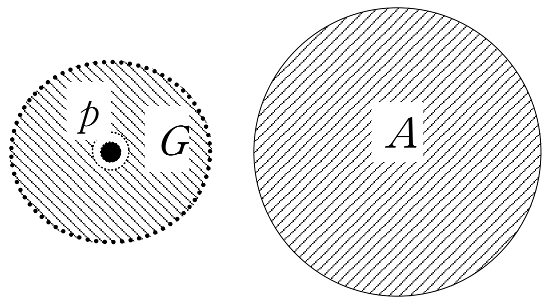
$\Leftrightarrow ((G \setminus \{p\}) \cap A = \phi \ ) \ \wedge \ (p \in A \ \vee \ p \notin A)$

$\Leftrightarrow ((G \setminus \{p\}) \cap A = \phi \ \wedge \ p \in A \ ) \ \vee$

$((G \setminus \{p\}) \cap A = \phi \ \wedge \ p \notin A)$

$\Leftrightarrow \ G \cap A = \{p\} \ \vee \ G \cap A = \phi$

$\Leftrightarrow \ G \cap A \subset \{p\}$



$p \in G$, $(G \setminus \{p\}) \cap A = \phi$

$p \in A \Leftrightarrow G \cap A = \{p\}$

$p \notin A \Leftrightarrow G \cap A = \phi$

유도집합

부분집합 A'를 A의 유도집합이라고 한다.

정의

$\Leftrightarrow$ A' = $\{x \in \mathrm{R} \mid x$: A의 집적점 $\}$

= 집합 A 의 모든 집적점들의 집합.

[예제2.1] 집합 $X = \{a,b,c,d,e\}$와 $A = \{a,b,c\}$와 위상

$$\Im = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

에서 A의 유도집합은 $A' = \{b,d,e\}$이다.

[숙제] X가 밀착위상일 때,

$A = \phi$이면 $A' = \phi$이고, $A = \{p\}$ 이면 $A' = \{p\}^c$이고,

A가 2개이상의 원소를 가지면, $A' = X$ 임을 보여라.

폐집합

$$\text{집합 } A\text{를 폐집합 (닫힌집합) 이라고 한다.} \overset{\text{정의}}{=} \text{집합 } A\text{의 여집합 } A^c\text{이 개집합}$$

[예제3.1] 집합 $X=\{a,b,c,d,e\}$와 위상

$$\Im=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

에서, 폐집합들의 집합은

$$\Gamma=\{\phi,X,\{b,c,d,e\},\{a,b,e\},\{b,e,\},\{a\}\}$$

이므로 ϕ, X 와 $A=\{b,c,d,e\}$는 개집합도 되고 폐집합도 된다.

$B=\{a,b\}$는 개집합도 폐집합도 아니다.

[예제3.2] 이산위상에서는 모든 집합이 개집합도 되고 폐집합도 된다.

[정리 5-3] 위상공간 $(X,\Im)$에서, $\Gamma=\{G^c \mid G\in\Im\}$를 모든 폐집합들의 집합이라 할 때, 다음이 성립한다.

$$[C_1]\ \phi, X\in\Gamma$$

$$[C_2]\ (\forall i\in I, A_i\in\Gamma) \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i\in\Gamma$$

$[C_3]\ (\forall i\in I$ **(유한집합)** $, A_i\in\Gamma) \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i\in\Gamma$

(증명) (1) $[O_1] \Rightarrow \phi^c = X\in\Im \wedge X^c=\phi\in\Im$

$$\Rightarrow \phi^c\in\Im \wedge X^c\in\Im$$

$$\Rightarrow \phi\in\Gamma \wedge X\in\Gamma \Rightarrow [C_1]$$

(2) $\forall i\in I, A_i\in\Gamma$

$$\Rightarrow \forall i\in I, A_i^c\in\Im$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i^c\in\Im,\ by\ [O_2]$$

$\Rightarrow (\bigcap_{i\in I} A_i)^c\in\Im$ **(드모르강의 법칙:** $\bigcup_{i\in I} A_i^c = (\bigcap_{i\in I} A_i)^c$ **)**

$$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i\in\Gamma$$

[정리 5-4]

A가 **폐집합** $\Leftrightarrow$ $A' \subset A$

(증명)

A **가 폐집합**

$\Leftrightarrow$ A^c**가 개집합**

$\Leftrightarrow$ A^c**가 개집합들의 합집합**

$\Leftrightarrow$ $\exists G_i$ **개집합들 :** $A^c = \cup_i G_i$

$\Leftrightarrow$ **(** $x \in A^c \Rightarrow \exists G$**개집합 :** $x \in G \subset A^c$ **)**

$\Leftrightarrow$ **(** $x \in A^c \Rightarrow \exists G$**개집합 :** $x \in G \ \wedge \ (G \setminus \{x\}) \subset A^c$ **)**

$\Leftrightarrow$ **(** $x \in A^c \Rightarrow x \in {}^{\exists} G$**개집합 :** $(G \setminus \{x\}) \cap A = \phi$ **)**

$\Leftrightarrow$ **([** $x \in {}^{\forall} G$**개집합,** $(G \setminus \{x\}) \cap A \neq \phi$ **]** $\Rightarrow$ $x \in A$ **) (대우 이용)**

$\Leftrightarrow$ **(** $x \in A'$ $\Rightarrow$ $x \in A$ **)**

$\Leftrightarrow$ $A' \subset A$ ■

집합의 폐포

$$\overline{A} \overset{\text{정의}}{=}$$ **집합 A를 포함하는 모든 폐집합들의 교집합.**

[명제5-5]

(1) 폐포는 폐집합이다.

(2) $A \subset F$이고 F가 폐집합이면, $A \subset \overline{A} \subset F$

(3) A가 폐집합 $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$

[예제4.1] 집합 $X = \{a,b,c,d,e\}$와 위상

$$\Im = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

에서, 폐집합들의 집합은

$$\Gamma = \{\phi, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e,\}, \{a\}\}$$

이다. 따라서

$$\overline{\{b\}} = \{b,e\},\ \overline{\{a,c\}} = X,\ \overline{\{b,d\}} = \{b,c,d,e\} \quad \blacksquare$$

[예제4.2] 여유한공간 X에서의 집합 A의 폐포를 구하라.

(풀이)

여유한위상 = $\{\phi\} \cup \{A^c \mid A : \text{유한집합} \subset X\}$

폐집합들의 집합= $\{X\} \cup \{A \mid A : \text{유한집합} \subset X\}$

(1) 집합A가 유한집합이면, A가 폐집합이므로, by 명제5-5 (3),

$\overline{A} = A$**이다.**

(2) 집합A가 무한집합인 경우:

$(A \subset F) \wedge$ **(F : 폐집합)**

$\Rightarrow (A \subset F) \wedge$ **($(F = X) \vee F$:유한집합)**

$\Rightarrow F = X$ **, 이유: (무한집합 A) $\not\subset$ (유한집합 F)**

그러므로 A가 유한집합이면 $\overline{A} = A$

A가 무한집합이면 $\overline{A} = X$ ■

#15(p143) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$

(증명)

$p \in A' \Leftrightarrow p \in {}^{\forall} G:$ 개집합$, (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi$

여기에서 $A \subset B$ **이므로**

$((G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi) \Rightarrow ((G \setminus \{p\}) \cap B \neq \phi)$ **이다.**

그러므로

$p \in {}^{\forall} G:$ 개집합$, (G \setminus \{p\}) \cap B \neq \phi$

즉 $p \in B'$ **이다.**

따라서 $A' \subset B'$ **이다.** ■

#17(p144) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

(숙제)

#25(p147) $A \cup A'$ **는 폐집합이다.**

(증명) $(A \cup A')^c$ **는 개집합임을 증명하자.**

$x \in (A \cup A')^c \Rightarrow x \in (A^c \cap (A')^c)$, **by 드모르간의 정리**

$\Rightarrow x \in A^c \wedge (x \in {}^{\exists} G\text{개집합} : (G \setminus \{x\}) \cap A = \phi)$

$\Rightarrow x \in {}^{\exists} G\text{개집합} : (G \cap A = \phi)$

$\Rightarrow \exists\,\text{개집합}\, G : x \in G \subset A^c$

여기에서 $p \in G$

$\Rightarrow (G \setminus \{p\}) \subset A^c$, **by** $G \subset A^c$

$\Rightarrow (G \setminus \{p\}) \cap A = \phi$

$\Rightarrow p \in (A')^c$

그러므로 $G \subset (A')^c$

$\Rightarrow \exists\,\text{개집합}\, G (= G_x) : x \in G \subset (A^c \cap (A')^c)$

따라서 $(A \cup A')^c = \cup \left\{ G_x \mid x \in (A \cup A')^c \right\}$

: 개집합들의 합집합은 개집합이다. ■

[정리5-6] $\overline{A} = A \cup A'$ **을 증명하라.**

(증명)

(1) $A \subset (A \cup A')$ **이고, by#25,** $(A \cup A')$ **는 폐집합이므로**

$A \subset \overline{A} \subset (A \cup A')$ **이다. 즉** $\overline{A} \subset (A \cup A')$ **이다.**

(2) $A \subset \overline{A}$ **이므로 #15에 의하여** $A' \subset (\overline{A})'$ **이다.**

그런데 $\overline{A}$ **는 폐집합이므로, [정리5-4]에 의하여** $(\overline{A})' \subset \overline{A}$ **이다.**

그러므로 $A' \subset \overline{A}$ **이다.**

따라서 $A \subset \overline{A}$ **와** $A' \subset \overline{A}$ **에 의하여** $(A \cup A') \subset \overline{A}$ ■

#27(p144) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

(증명) #15 와 [정리5-6]을 이용 --> (숙제)

#28(p144) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(증명) #27를 이용 --> (숙제)

폐포점(closure point)

p **는 "폐포점"** $\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $p \in \overline{A}$

[명제] $p \in \overline{A} \Leftrightarrow (p \in {}^{\forall} G\text{개집합},\ G \cap A \neq \phi)$

(증명) $p \in \overline{A} \Leftrightarrow p \in \cap \{F \mid A \subset F\text{: 폐집합}\}$

$\Leftrightarrow {}^{\forall}\text{폐집합}F,\ (A \subset F \Rightarrow p \in F)\ \}$

$\Leftrightarrow {}^{\forall}\text{개집합}G,\ (A \subset G^c \Rightarrow p \in G^c\ )$

$\Leftrightarrow {}^{\forall}\text{개집합}G,\ (p \in G \Rightarrow A \not\subset G^c)$, **(대우를 이용)**

$\Leftrightarrow {}^{\forall}\text{개집합}G,\ (p \in G \Rightarrow G \cap A \neq \phi)$

$\Leftrightarrow p \in {}^{\forall} G\text{개집합},(\ G \cap A \neq \phi)$ ■

비교

$p \in A' \Leftrightarrow (\ p \in {}^{\forall} G\text{개집합},\ (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi\ )$

$p \in \overline{A} \Leftrightarrow (\ p \in {}^{\forall} G\text{개집합},\ G \cap A \neq \phi)$

조밀집합(dense subset)

$\overline{A} = X \overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ 집합 A는 X에서 조밀하다

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ 집합 A는 X의 조밀부분집합이다

(예) 유리수집합 $\mathbb{Q}$ 는 집합 $\mathbb{R}$ 에서 조밀하다.

[예제4.4]

집합 $X = \{a,b,c,d,e\}$ 와 위상

$$\Im = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

에서, 폐집합들의 집합은

$$\Gamma = \{\phi, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e,\}, \{a\}\}$$

이다. 따라서

$$\overline{\{a,c\}} = X,\ \overline{\{b,d\}} = \{b,c,d,e\}$$

그러므로 집합 $\{a,c\}$ 는 조밀집합이지만, $\{b,d\}$ 는 조밀집합이 아니다.

[명제 5-7] 쿠라토스키의 폐포정리(공리)

(1) $\overline{\phi} = \phi$ **(2)** $A \subset \overline{A}$ **(3)** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ **(4)** $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$

(증명)

(1)(4) ϕ**와** $\overline{A}$**는 폐집합이므로 그 자신의 폐포와 같다.**

(2) $\overline{A} = A \cup A'$ **이므로** $A \subset \overline{A}$

(3) #28에서 증명함. ■

주목 : 폐포공리 4개 만족하는 함수 $k : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$**,** $k(A) = \overline{A}$**가 존재**

$\Leftrightarrow$ A **: 폐집합 정의 (**$k(A) = A$**)**

$\Leftrightarrow$ A^c **: 개집합 정의 (** A^c: 개집합 $\Leftrightarrow A$: 폐집합 **)**

$\Leftrightarrow$ $\Im$ **: 위상 정의 (** $\Im = \{A \mid A: 개집합\}$**)**

집합의 내점

점 p**는 집합** A**의 내점이다.**

$$\overset{정의}{\Leftrightarrow} \quad \exists \text{ 개집합 } G : p \in G \subset A$$

집합의 내부

$$A^{o} \overset{\text{정의}}{=} \{ p \in A \mid p : A\text{의 내점} \}$$

$$= \text{집합 } A\text{에 포함되는 모든 개집합들의 합집합}$$

[명제5-8]

(1) A^{o}**는 개집합이다.**

(2) 개집합 $G \subset A \Rightarrow G \subset A^{o} \subset A$

(3) A**: 개집합** $\Leftrightarrow A^{o} = A$

(증명)

(3) A**: 개집합** $\Rightarrow A \subset A^{o} \subset A$

$\Rightarrow A^{o} = A$ ■

집합의 외부

$$A^E \overset{\text{정의}}{=} (A^c)^o = \text{집합 } A\text{의 } \underline{\text{여집합}}\text{의 내부}$$

[명제] $(A^c)^o = (\overline{A})^c$ **(숙제)** $\overline{(A^c)} = (A^o)^c$

(증명) $p \in (A^c)^o \Leftrightarrow \exists$ 개집합 $G : p \in G \subset A^c$

$\Leftrightarrow (p \in {}^{\exists} G$ 개집합 $: G \cap A = \phi)$

$\Leftrightarrow p \in (\overline{A})^c$ ■

집합의 경계

$$A^b \overset{\text{정의}}{=} (A^o \cup A^E)^c = \text{집합 } A\text{의 내부점도 외부점도 아닌 점들의 집합}$$

[정리5-9] $\overline{A} = A^o \cup A^b$

(증명) $A^o \subset A$이고 $A^E \subset A^c$이므로 $A^o \cap A^E = \phi$이다. 정의에 따라

$A^b = (A^o \cup A^E)^c$이므로 $X = A^o \cup A^E \cup A^b$는 서로소의 합집합이다

따라서 $A^o \cup A^b = (A^E)^c = ((A^c)^o)^c = ((\overline{A})^c)^c = \overline{A}$ ■

[예제] **구간** $[a,b],(a,b),[a,b),(a,b]$ **들의 내부는** (a,b) **이고 경계는** $\{a,b\}$ **이다.**

[예제] **집합** $X=\{a,b,c,d,e\}$ **위에 위상**

$$\Im=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}$$

을 가진 위상공간 $(X,\Im)$ **의 부분집합** $A=\{b,c,d\}$ **생각해 보자.**

점 c **와** d **는 개집합** $\{c,d\}$ **가 있어,**

$$c\in\{c,d\}\subset A,\ d\in\{c,d\}\subset A$$

이므로 A **의 내점이지만** $b\in G\subset A$ **인 그런 개집합** G **가 존재하지 않아** A **의 내점이 아니다. 그러므로** A **의 내부는** $A^o=\{c,d\}$ **이다.** A **의 여집합** $A^c=\{a,e\}$ **에 대해서는** $a\in\{a\}\subset A^c$ **가 유일한** A^c **의 내점이다. 그러므로** A **의 외부는** $A^E=(A^c)^o=\{a\}$ **이다. 따라서** A **의 경계는** $A^b=X-A^o-A^E=\{b,e\}$ **로 주어진다.**

조밀한 곳이 없는(nowhere dense)

집합 A**는 위상공간** X**에서 조밀한 곳이 없다.** $\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $(\overline{A})^{o} = \phi$

[예제5.5] 유리수집합의 부분집합 $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ **는 내점을 갖지 않는다. 즉** $A^{o} = \phi$ **이다. 하지만** A**는 실수집합** $\mathbb{R}$ **에서 조밀한 곳이 있다. 왜냐하면** $\overline{A} = [0,1]$ **이고** $(\overline{A})^{o} = (0,1) \neq \phi$ **이기 때문이다.**

근방

집합 A**는 점** p**의 근방이다.**

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ **개집합** G **:** $p \in G \subset A$

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ **점** p**가 집합** A**의 내점이다.**

근방계

$\mathcal{N}_p \overset{\text{정의}}{=} \{A \mid A : p\text{의 근방}\}$

[명제5-10] 근방정리(공리)

(1) $\mathcal{N}_p \neq \phi \ \wedge \ \forall A \in \mathcal{N}_p, p \in A$

(2) $A, B \in \mathcal{N}_p \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{N}_p$

(3) $(A \in \mathcal{N}_p \wedge A \subset B) \Rightarrow B \in \mathcal{N}_p$

(4) $\forall A \in \mathcal{N}_p \ \exists G \in \mathcal{N}_p : (G \subset A \wedge (\forall x \in G, G \in \mathcal{N}_x))$

(증명)

(1) **전체 집합** $X \in \mathcal{N}_p$ **이므로** $\mathcal{N}_p \neq \phi$.

$A \in \mathcal{N}_p \Rightarrow A$**는** p**의 근방**

$\Rightarrow \exists$ **개집합** G **:** $p \in G \subset A$

$\Rightarrow p \in A$

(2) $A, B \in \mathcal{N}_p \Rightarrow \exists$ **개집합** G, H **: (** $p \in G \subset A \ \wedge \ p \in H \subset B$ **)**

$\Rightarrow \exists$ **개집합** $G \cap H$ **:** $p \in G \cap H \subset A \cap B$

$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{N}_p$

(3) $(A \in \mathcal{N}_p \wedge A \subset B) \Rightarrow$ **(** $\exists$ **개집합** G **:** $p \in G \subset A$**)** $\wedge$ **(**$A \subset B$ **)**

$\Rightarrow$ $\exists$ **개집합** G **:** $p \in G \subset B$

$\Rightarrow$ $B \in \mathcal{N}_p$

(4) $A \in \mathcal{N}_p \Rightarrow$ $\exists$ **개집합** G **:** $p \in G \subset A$

여기에서 $x \in G \Rightarrow$ $\exists$ **개집합** G **:** $x \in G \subset G$

$\Rightarrow$ $G \in \mathcal{N}_x$ ■

주의 : 거꾸로, 집합 X **내의 모든** p **점에 대하여 [명제5-10]을 만족하는 근방계** $\mathcal{N}_p$ **가 주어진다면,**

(G**는 개집합** $\Leftrightarrow \forall p \in G, G \in \mathcal{N}_p$ **)**

으로 개집합을 정의하여 위상공간을 만들 수 있다.

수렴열

위상공간 X**에 속하는 점렬** $< a_1, a_2, \cdots >$**은** $b \in X$**에 수렴한다.**

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $b \in {}^{\forall} G$ **: 개집합,** $\exists\, n_0 \in \mathrm{N} : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$

$$\Leftrightarrow \quad a_n \to b$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = b$$

이 때 b**를 점렬** $< a_n >$ **의 극한이라고 한다.**

[예제7.1] 밀착위상공간 X**에서 점** $b \in X$**를 포함하는 유일한 개집합은** X**이다. 점열** $< a_n >$ **에 대하여** $\forall n \in \mathrm{N}$, $a_n \in X$**이므로** $a_n \to b$**이다.**

[예제7.2] 이산위상공간 X**에서 점** $b \in X$**를 포함하는 개집합 중에 단일원 집합** $\{b\}$**이 있다. 그러므로** $a_n \to b$ **이면** $\exists\, n_0 \in \mathrm{N} : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in \{b\})$ **이어야 하므로, 점열은** $< a_n > \; = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, b, b, b, \cdots\}$**이 된다.**

[예제7.3] 무한집합 X**상의 여가산위상공간에서도,**

$$a_n \to b \Leftrightarrow < a_n > \; = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, b, b, b, \cdots\}$$ **이다.**

(증명)

($\Leftarrow$) 은 당연하다.

($\Rightarrow$) $A=\{a_n \mid a_n \neq b\}$ 는 가산집합이므로 A^c 는 b 를 포함하는 개집합이다. $a_n \to b$ 이면 $\exists\, n_0 \in \mathrm{N} : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in A^c)$ 이다. 그런데 A^c 안에는 $< a_n >$ 의 항들 중에서는 b 밖에 없다. 그러므로 $< a_n >$ 의 항 중에서 유한개를 제외한 나머지는 b 와 같다. ■

거친위상과 섬세한 위상

공집합이 아닌 집합 X 상의 두 위상 $\Im_1, \Im_2$ 에 대하여,

$\Im_1 \subset \Im_2 \overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $\Im_1$ 는 $\Im_2$ 보다 **거칠다** or **약하다** or **작다** 라고 한다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $\Im_2$ 는 $\Im_1$ 보다 **섬세하다** or **강하다** or **크다** 라고 한다.

[예제8.1] 집합 X 상의 임의의 위상은 밀착위상보다 크고, 이산위상보다 작다.

[예제8.2] 평면 R^2 상의 여유한위상 $\Im$ 은 보통위상 u 보다 거칠다. 왜냐하면 집합 A 가 여유한위상 $\Im$ 에 속하면 A^c 이 R^2 이거나 유한집합이다. 그러면 A^c 은 보통위상 u 에서 폐집합이므로 A 는 u 에서 개집합이다.

부분공간, 상대위상

A 를 위상공간 $(X, \Im)$ 의 공집합이 아닌 부분집합이라고 하자.
$\Im_A = \{A \cap G \mid G \in \Im\}$ 는 A 위에 하나의 위상이 되는데, 이것을 A 위의 **상대위상**이라고 한다. 위상공간 $(A, \Im_A)$ 를 $(X, \Im)$ 의 **부분공간**이라 한다

[예제9.2] 실수집합 R 의 부분공간인 폐구간 $A = [3, 8]$ 에서 집합 $[3, 5)$ 은 개집합이다. 왜냐하면 개구간 $(2, 5)$ 는 R 에서 개집합이고, $[3, 5) = (2, 5) \cap A$ 이기 때문이다.

제6장 기저와 부분기저

집합론 연습

$\mathscr{B} = \{\{a,b\},\{c,d\}\}$ **이고,** $A_1 = \{a,b\}$, $A_2 = \{c,d\}$, $I = \{1,2\}$**이라면**

$$\cup \mathscr{B} = \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{2} A_i = A_1 \cup A_2 = \{a,b\} \cup \{c,d\}$$

$$\cap \mathscr{B} = \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{2} A_i = A_1 \cap A_2 = \{a,b\} \cap \{c,d\}$$

기저

위상공간 $(X,\mathfrak{I})$**에서,**

$\mathscr{B}(\subset \mathfrak{I})$**는 위상** $\mathfrak{I}$**의 기저이다.**

$$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall G \in \mathfrak{I},\ \exists \mathcal{C} \subset \mathscr{B} : G = \cup \mathcal{C}$$

$$\left(\Longleftrightarrow \quad \forall G \in \mathfrak{I},\ \forall p \in G,\ \exists B \in \mathscr{B} : p \in B \subset G \right)$$

[예제1.1]

(1) $(a,b)=\{x\in\mathrm{R}\,|\,a<x<b\}$ **일 때,**

$\mathscr{B}=\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathrm{R}\}$**는 실수위상공간** R **의 기저가 된다.**

(2) $B((a,b),\epsilon)=\left\{(x,y)\in\mathrm{R}^2\,|\,\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\epsilon\right\}$ **일 때,**

$\mathscr{B}=\left\{B((a,b),\epsilon)\,|\,(a,b)\in\mathrm{R}^2,\,\epsilon>0\right\}$**는 평면** R^2**의 기저가 된다.**

[예제1.2] $R((a,b),(c,d))=\left\{(x,y)\in\mathrm{R}^2\,|\,a<x<b\,\wedge\,c<y<d\right\}$ **을**

R^2 **상의 직사각형 영역이라고 하면,**

$\mathscr{B}=\{R((a,b),(c,d))\,|\,a,b,c,d\in\mathrm{R}\}$**는 평면** R^2**의 기저가 된다.**

[예제1.4] $X=\{a,b,c\}$ **이고,** $\mathscr{B}=\{\{a,b\},\{b,c\}\}$ **는** X**상 어떤 위상의 기저가 되지 못한다. 왜냐하면** $\{a,b\}$ **와** $\{b,c\}$ **는 개집합이므로** $\{b\}=\{a,b\}\cap\{b,c\}$ **도 개집합이어야 되는데,** $\{b\}$ **는** $\mathscr{B}$ **의 원소들의 합집합으로 표시될 수 없기 때문이다.**

[정리6-1] 기저의 자격

집합 X의 부분집합족인 $\mathscr{B}$가 X위의 어떤 위상의 기저가 될 수 있다.

$\Leftrightarrow$ **(1)** $X = \cup \mathscr{B}$

(2) $\forall A, B \in \mathscr{B}$, $\exists \mathcal{C} \subset \mathscr{B} : A \cap B = \cup \mathcal{C}$

(증명)

($\Rightarrow$**)** $\mathscr{B}$ **가** X**위의 위상** $\Im$**의 기저라고 가정하자.**

(1) $X \in \Im$ **이므로 기저의 정의에 의하여** $\exists \mathcal{C} \subset \mathscr{B} : X = \cup \mathcal{C}$

그런데 $\cup \mathcal{C} \subset \cup \mathscr{B}$ **이므로** $X \subset \cup \mathscr{B}$ **이 성립한다. 따라서** $X = \cup \mathscr{B}$

(2) $\forall A, B \in \mathscr{B}$, $A, B \in \Im$ **이므로** $A \cap B \in \Im$ **이다.** $\mathscr{B}$ **가 위상** $\Im$**의 기저이므로, 기저의 정의에 따라,** $\exists \mathcal{C} \subset \mathscr{B} : A \cap B = \cup \mathcal{C}$ **이 된다.**

($\Leftarrow$**)**

$\Im = \{ \cup \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subset \mathscr{B} \}$**가** X**위의 한 위상이 됨을 보이자.**

(O_1**)** $\mathcal{C} = \mathscr{B}$ **이면** $\mathcal{C} \subset \mathscr{B}$ **이므로** $X = \cup \mathscr{B} = \cup \mathcal{C} \in \Im$ **이다.**

$\mathcal{C} = \phi$ **이면** $\phi \subset \mathscr{B}$ **이므로** $\phi = \cup \phi = \cup \mathcal{C} \in \Im$ **이다.**

(O_2) $\{G_i\}_{i\in I} \subset \Im$ **이라면,** $\exists A_{i,j} \in \mathscr{B}$ **:** $G_i = \bigcup_{j\in J_i} A_{i,j}$ **가 된다.**

그리하여 $\bigcup_{i\in I} G_i = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} A_{i,j} = \bigcup_{k\in K} A_k \in \Im$ **이다.**

여기서 $K = \bigcup_{i\in I} J_i$ **이다.**

(O_3) $G, H \in \Im$ 이라면 $\exists \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathscr{B}$ **:** $G = \cup \mathcal{C}_1$ **,** $H = \cup \mathcal{C}_2$ **이다.**

그리하여 $G \cap H = (\cup \mathcal{C}_1) \cap (\cup \mathcal{C}_2)$

$= \cup \{A \cap B \mid A \in \mathcal{C}_1, B \in \mathcal{C}_2\}$

$= \cup \{\cup \mathcal{C} \mid \cup \mathcal{C} = A \cap B, \mathcal{C} \subset \mathscr{B}, A \in \mathcal{C}_1, B \in \mathcal{C}_2\} \in \Im$ ■

[예제1.5]

(1) $\mathscr{B}_u = \{(a,b] \mid a,b \in \mathrm{R} \wedge a < b\}$**는 기저의 자격 2가지를 만족한다.**

기저 $\mathscr{B}_u$ **가 만든 위상을 상한위상(upper limit topology) 이라고한다.**

(2) $\mathscr{B}_l = \{[a,b) \mid a,b \in \mathrm{R} \wedge a < b\}$**는 기저의 자격 2가지를 만족한다.**

기저 $\mathscr{B}_l$ **가 만든 위상을 하한위상(lower limit topology) 이라고한다.**

부분기저

어떤 위상공간 $(X,\Im)$에서 $\Im$의 부분집합 $\mathcal{S}$ 의 유한교집합들의 집합이 $\Im$의 기저를 이룰 때, $\mathcal{S}$ 를 $\Im$의 **부분기저**라고 한다.

[예제2.1] $\mathcal{S} = \{(a,\infty) \mid a \in \mathrm{R}\} \cup \{(-\infty, b) \mid b \in \mathrm{R}\}$ 는 실수위상공간의 부분기저가 된다. 왜냐하면 $(a,b) = (a,\infty) \cap (-\infty, b)$ 이기 때문이다.

[예제2.2] 평면 R^2 에서 수직인 무한띠와 수평인 무한 띠들은 R^2 위상공간의 부분기저가 된다. 왜나하면 수직무한띠와 수평무한띠의 교집합이 열린 직사각형이 되고, 열린직사각형 들은 R^2의 기저를 이루기 때문이다.

위상의 생성

[정리6.2] $\phi \neq {}^{\forall}\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A}$ 를 부분기저로 갖는 X상의 유일한 위상$(\Im)$이 존재한다. (이때 $\mathcal{A}$ 는 $\Im$를 **생성한다**(generate)고 말한다.)

(증명) 다음페이지

$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \mid A_1, A_2, \ \cdots \ , A_n \in \mathscr{A} \right\}$라고 하면 $\mathscr{B}$ 는 X상의 어떤 위상의 기저가 될 수 있다. 왜냐하면

(1) $X = \cap \phi$ 이므로 $X \in \mathscr{B}$ 그러므로 $X = \cup \mathscr{B}$ 이 된다.

(2) $A, B \in \mathscr{B}$ 이라면

$\exists A_1, A_2, \ \cdots \ , A_n, \ B_1, B_2, \ \cdots \ , B_m \in \mathscr{A}$:

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \ \cdots \ \cap A_n, \ B = B_1 \cap B_2 \cap \ \cdots \ \cap B_m$$

그러므로 $A \cap B = A_1 \cap A_2 \cap \ \cdots \ \cap A_n \cap B_1 \cap B_2 \cap \ \cdots \ B_m$

이 되어 $A \cap B \in \mathscr{B}$ 이 된다.

그러므로 $\mathscr{A}$ 는 어떤 위상의 부분기저가 된다.

다음으로 생성된 위상의 유일성을 보이자. 만약 $\mathscr{A}$ 가 위상 $\Im_1$ 과 $\Im_2$의 부분기저라 하자. $G \in \Im_1$ 라면 $\mathscr{A}$ 가 $\Im_1$ 의 부분기저이므로

$$\exists \ G_{i,j} \in \mathscr{A} : G = \cup_i \cap_j^{n_i} G_{i,j}$$

한편, $\mathcal{A}$ 가 $\Im_2$ 의 부분기저이므로 $\mathcal{A} \subset \Im_2$ 이다. 그러므로

$$G_{i,j} \in \Im_2 \text{ 인데, } \Im_2 \text{ 가 위상이므로 } \cup_i \cap_j^{n_i} G_{i,j} \in \Im_2$$

이다. 즉 $G \in \Im_2$ 이다.

그러므로 ($G \in \Im_1 \Rightarrow G \in \Im_2$) 즉 $\Im_1 \subset \Im_2$.

똑같은 원리로 $\Im_2 \subset \Im_1$. 그리하여 $\Im_1 = \Im_2$ 즉 위상은 유일하다. ■

[예제3.1] 부분집합족 $\{\{a,b\},\{b,c\},d\}$ 이 집합 $\{a,b,c,d\}$ 에 생성하는 위상을 구하여라. **(숙제)**

[예제3.2] $(X,\leq)$ 를 공집합이 아닌 완전순서집합이라하자.

X상의 부분집합족

$$\mathcal{A} = \{\ \{x \in X \mid x < p\} \mid p \in X\ \} \cup \{\ \{x \in X \mid x > p\} \mid p \in X\ \}$$

에 의하여 생성되는 X상의 위상을 **순서위상(order topology)**이라 한다.

(예) 실수공간의 보통위상도 일종의 순서위상이라 볼 수 있다.

[명제6.3] 공집합이 아닌 집합 X상의 부분집합족 $\mathcal{A}$ 가 생성하는 위상 $\Im$ 은 $\mathcal{A}$ 를 포함하는 X상의 모든 위상의 공통집합이다. 즉 $\mathcal{A}$ 를 포함하는 X상의 모든 위상 중에서 가장 작은 위상이다.

(증명)

위상 $\Im$ 은 $\mathcal{A}$ 를 부분기저로 가지기 때문에 $\mathcal{A}$ 를 포함하는 위상이다.

$\Im_i$ 를 $\mathcal{A}$ 를 포함하는 임의의 위상이라고 하자.

$G \in \Im \Rightarrow \exists\, S_{ij} \in \mathcal{A} : G = \bigcup_i \bigcap_{j=1}^{n_i} S_{ij}$, (여기서 $n_i \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow G \in \Im_i$ (이유: 위상 $\Im_i$ 가 $\mathcal{A}$ 를 포함하므로, $\mathcal{A}$ 의 모든 원소의 유한교집합과 임의의 합집합은 다시 $\Im_i$ 에 속한다.)

그러므로 $\Im \subset \Im_i$ 이다. 그러므로

$\Im \subset \bigcap_i \{\Im_i \mid \Im_i$: $\mathcal{A}$ 를 포함하는 X상의 위상 $\}$

그런데 $\Im$ 도 $\mathscr{A}$ 를 포함하는 X상의 위상 $\Im_i$ 중에 하나이므로 $\bigcap_i \Im_i \subset \Im$.

그러므로 $\Im = \bigcap_i \Im_i$ 이다. ■

국소기저

$p \in (X, \Im)$ 에 대하여,

$\mathscr{B}_p$ 를 점 p 에서의 **국소기저(local base)**라고 한다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \ p \in {}^{\forall} G \in \Im, \ \exists B \in \mathscr{B}_p \ : p \in B \subset G$$

[예제4.1] 평면 R^2 위에서 점 p 를 중점으로 둔 개 원반족

$$\left\{ B(p, \frac{1}{n}) \mid x \in \mathrm{R}^2, n \in \mathrm{N} \right\}$$

은 점 p 의 국소기저가 된다.

[정리6-4] $\mathscr{B}$ 가 위상공간 $(X, \Im)$의 기저이고 $p \in X$ 일 때,

$\{ B \in \mathscr{B} \mid p \in B \}$는 점 p의 국소기저가 된다.

[정리6-5] **위상공간** $(X,\mathfrak{I})$**에서,** $p \in X,\ A \subset X$ **이고,** $\mathscr{B}_p$**가** p**의 국소기저 일 때, 점** p**의 집합** A**의 집적점이다**

$$\left(\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \ p \in {}^{\forall} G \in \mathfrak{I},\ (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi \right)$$

$$\Leftrightarrow \ {}^{\forall} G \in \mathscr{B}_p,\ (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi$$

(증명)

($\Longrightarrow$**)** $G \in \mathscr{B}_p$

$\Longrightarrow p \in G \in \mathfrak{I}$

$\Longrightarrow \ (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi$ **, by 가정**

($\Longleftarrow$**)** $p \in G \in \mathfrak{I}$

$\Longrightarrow \exists B \in \mathscr{B}_p : p \in B \subset G$ **, (이유 :** $\mathscr{B}_p$**가 국소기저)**

$\Longrightarrow (B \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi$ **by 가정**

$\Longrightarrow (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi$ **(이유,** $(B \setminus \{p\}) \subset (G \setminus \{p\})$ **)**

[명제6-6] **위상공간 $(X,\Im)$에서, $p \in X$ 이고, $\mathscr{B}_p$가 p의 국소기저 일 때,** $a_n \to p$ **(** $\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $p \in {}^\forall G \in \Im, \exists n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$ **)**

$$\Leftrightarrow \quad {}^\forall G \in \mathscr{B}_p, \exists n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$$

[따름정리6-7]

$\mathscr{B}$ 가 위상공간 $(X,\Im)$의 기저이고 $p \in X, A \subset X$라 하자.

(1) 점 p의 집합 A의 집적점이다

($\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $p \in {}^\forall G \in \Im, (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi$ **)**

$$\Leftrightarrow \quad p \in {}^\forall G \in \mathscr{B}, (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi$$

(2) $a_n \to p$ **(** $\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $p \in {}^\forall G \in \Im, \exists n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$ **)**

$$\Leftrightarrow \quad p \in {}^\forall G \in \mathscr{B}, \exists n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$$

(증명)

($\Longrightarrow$) $p \in {}^{\forall} G \in \mathfrak{I}$, $\exists\, n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$

$\Rightarrow p \in {}^{\forall} G \in \mathscr{B}$, $\exists\, n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$, **(이유 $\mathscr{B} \subset \mathfrak{I}$)**

($\Longleftarrow$) $p \in G \in \mathfrak{I} \Longrightarrow \exists\, B \in \mathscr{B} : p \in B \subset G$ **, (이유 : $\mathscr{B}$는 $\mathfrak{I}$의 기저)**

$\Longrightarrow \exists\, n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in B)$, **by 가정**

$\Longrightarrow \exists\, n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$, **(이유: $B \subset G$)**

7장. 연속성과 위상동형

연속함수

두 위상공간 사이의 함수 $f:(X,\Im_1) \to (Y,\Im_2)$**는 연속함수이다.**

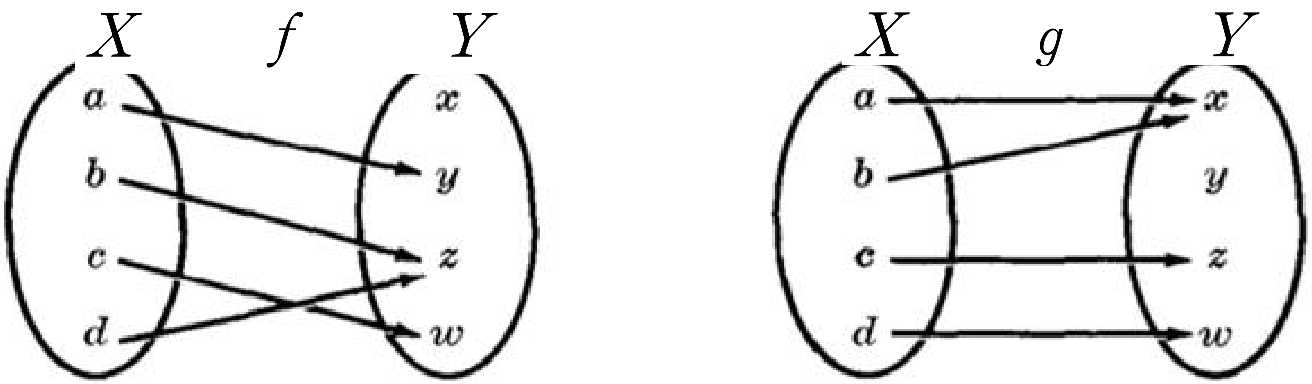
$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ **(** $G \in \Im_2 \Rightarrow f^{-1}(G) \in \Im_1$ **)**

[예제1.1] $X = \{a,b,c,d\}$, $Y = \{x,y,z,w\}$

$$\Im_1 = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$$

$$\Im_2 = \{Y, \phi, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}, \{y,z,w\}\}$$ **일 때,**

함수 $f: X \to Y$ **와** $g: X \to Y$ **를 생각하자.**



Y상의 위상 $\Im_2$의 각 원소의 역이 X상의 위상 $\Im_1$의 원소가 되므로 함수 f는 연속함수이다. 하지만 $\Im_2$의 원소 $\{y,z,w\}$ 의 역상 $g^{-1}(\{y,z,w\}) = \{c,d\}$ 는 $\Im_1$의 원소가 아니므로 g는 연속이 아니다.

[명제7-1] $\mathscr{B}$가 위상 $\Im_2$의 기저일 때,

$f:(X,\Im_1) \to (Y,\Im_2)$ 가 연속함수

($\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $G \in \Im_2 \Rightarrow f^{-1}(G) \in \Im_1$)

$\Leftrightarrow$ ($G \in \mathscr{B} \Rightarrow f^{-1}(G) \in \Im_1$)

(증명)

$(\Rightarrow)$

$G \in \mathscr{B} \;\Rightarrow\; G \in \Im_2$ **(이유: $\mathscr{B} \subset \Im_2$)**

$\Rightarrow f^{-1}(G) \in \Im_1$ **(by 가정)**

$(\Leftarrow)$

$G \in \mathfrak{I}_2 \Rightarrow \exists\, G_i \in \mathscr{B} : G = \bigcup_{i \in I} G_i$ **(이유: $\mathscr{B}$ 가 $\mathfrak{I}_2$의 기저)**

$\Rightarrow f^{-1}(G) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} G_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i)$

여기에서 $f^{-1}(G_i) \in \mathfrak{I}_1$ **(by가정)**

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i) \in \mathfrak{I}_1$ **(이유: 개집합들의 합집합은 개집합)**

$\Rightarrow f^{-1}(G) \in \mathfrak{I}_1$ ■

[정리7-2] $\mathscr{S}$가 위상 $\mathfrak{I}_2$의 부분기저일 때,

$f : (X, \mathfrak{I}_1) \to (Y, \mathfrak{I}_2)$ **가 연속함수**

($\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $G \in \mathfrak{I}_2 \Rightarrow f^{-1}(G) \in \mathfrak{I}_1$ **)**

$\Leftrightarrow$ **(** $G \in \mathscr{S} \Rightarrow f^{-1}(G) \in \mathfrak{I}_1$ **)**

(증명)

$(\Rightarrow)$

$G \in \mathcal{S} \Rightarrow \quad G \in \Im_2$ **(이유: $\mathcal{S} \subset \Im_2$)**

$\Rightarrow f^{-1}(G) \in \Im_1$ **(by 가정)**

$(\Leftarrow)$

$G \in \Im_2 \Rightarrow \; \exists\, G_{ij} \in \mathcal{S}$ **:** $G = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J_i} G_{ij} \right)$**,** J_i **들은 유한집합**

(이유: $\mathcal{S}$ 가 $\Im_2$의 부분기저)

$\Rightarrow f^{-1}(G) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J_i} G_{ij} \right) \right) = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J_i} f^{-1}(G_{ij}) \right)$

여기에서 $f^{-1}(G_{ij}) \in \Im_1$ **(by가정)**

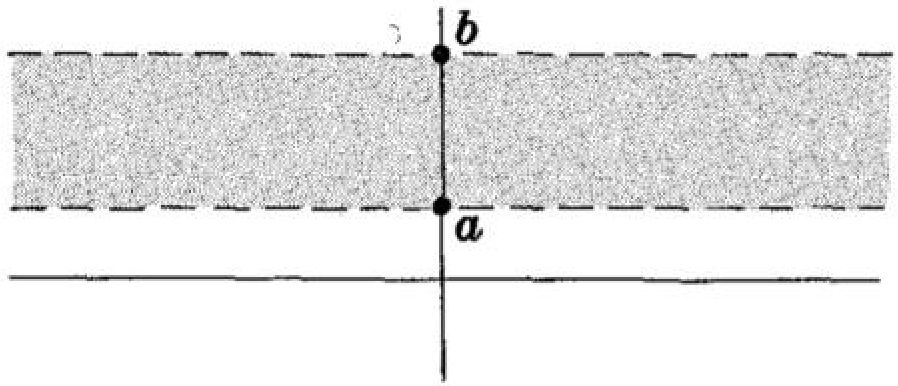
$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J_i} f^{-1}(G_{ij}) \right) \in \Im_1$

(이유: 개집합들의 유한교집합들의 합집합은 개집합)

$\Rightarrow f^{-1}(G) \in \Im_1 \quad \blacksquare$

[예제1.4] 평면 R^2에서 직선 R로의 사영사상은 모두 보통위상에 관하여 연속이다.

(증명) 사영사상 $\pi : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, $\pi((x,y)) = y$를 생각하자.

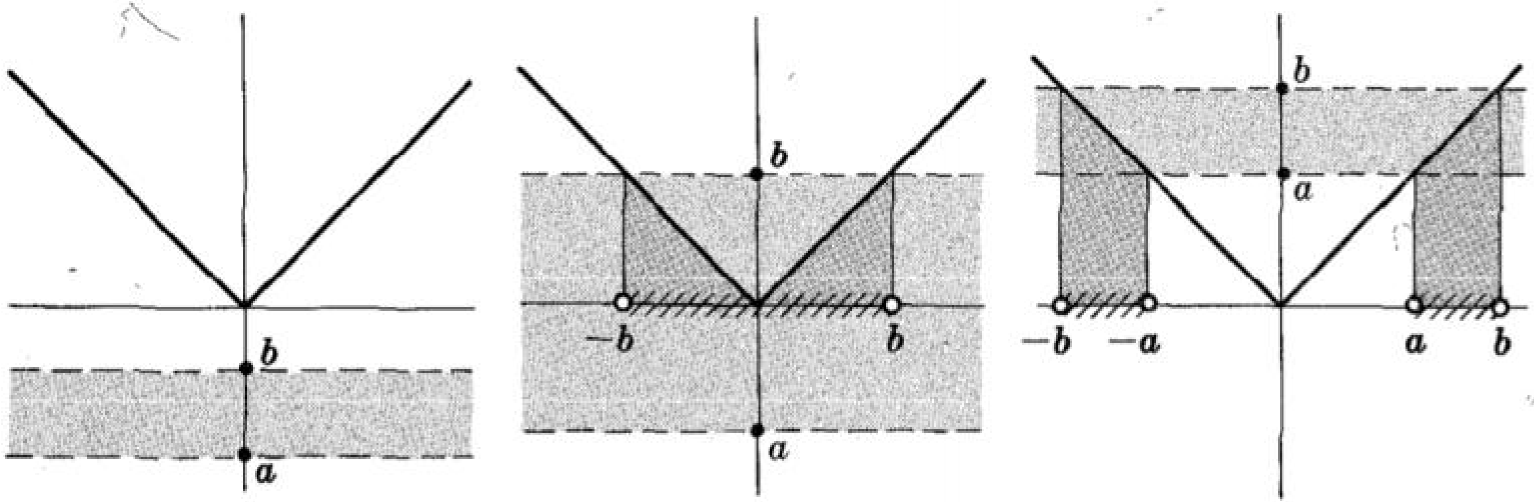


위상공간 R의 기저의 원소인 개구간 (a,b)의 역상 $\pi^{-1}((a,b))$은 위와 같이 무한히 긴 열린 띠 $(-\infty,\infty)\times(a,b)$이다. 열린 띠는 위상공간 R^2에서 개집합이므로 [명제7-1]에 의하여 π는 연속이다. ■

[예제1.5]

함수 $f(x): \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R},\ f(x) = |x|$ **은 연속이다. 왜냐하면 공변역** R **위의 기저원소인 개구간** $A = (a,b)$**에 대하여,**

$$f^{-1}[A] = \begin{cases} \varnothing & \text{if } a < b \leq 0 \\ (-b, b) & \text{if } a < 0 < b \\ (-b, -a) \cup (a, b) & \text{if } 0 \leq a < b \end{cases}$$



$f^{-1}[A] = \varnothing$ $\quad$ $f^{-1}[A] = (-b, b)$ $\quad$ $f^{-1}[A] = (-b, -a) \cup (a, b)$

모든 경우에 정의역 R **위에서 개집합이 되기 때문이다.** ■

[정리7-3]

$f:(X,\Im_1)\to(Y,\Im_2)$ 이 연속함수

$\Leftrightarrow$ (F : 폐집합 in $\Im_2$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(F)=$: 폐집합 in $\Im_1$)

(증명) 숙제

임의밀착성(붙어있다)

점 p가 집합 A에 **임의밀착** 한다 $\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $p\in\overline{A}$

[정리7-4]

함수 $f:X\to Y$ 이 연속함수

$\Leftrightarrow$ (점 p가 집합 A에 임의밀착 $\Rightarrow$ 점 $f(p)$가 집합 $f(A)$에 임의밀착)

$\Leftrightarrow$ ($p\in\overline{A}$ $\Rightarrow$ $f(p)\in\overline{f(A)}$)

$\Leftrightarrow$ ($f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$)

(증명)

($\Longrightarrow$) 결론의 대우를 증명한다.

$$f(p) \not\in \overline{f(A)}$$

$\Longrightarrow$ $f(p) \in {}^{\exists} G$ **개집합 :** $G \cap f(A) = \phi$

$\Longrightarrow$ $p \in {}^{\exists} f^{-1}(G)$ **개집합**[1] **:** $f^{-1}(G) \cap A \overset{[2]}{=} \phi$

$\Longrightarrow$ $p \not\in \overline{A}$

이유 : [1] f **가 연속함수**

[2] 대우로 증명

$$f^{-1}(G) \cap A \neq \phi$$

$\Longrightarrow$ $\exists\, x : x \in f^{-1}(G) \cap A$

$\Longrightarrow$ $(\ f(x) \in G \ \wedge \ f(x) \in f(A))$

$\Longrightarrow$ $f(x) \in G \cap f(A)$

$\Longrightarrow$ $G \cap f(A) \neq \phi$

별해[2] $f^{-1}(G) \cap A \subset f^{-1}(G) \cap f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(G \cap f(A)) = f^{-1}(\phi) = \phi$

($\Longleftarrow$) F **가 폐집합 in Y**

$\Longrightarrow$ $A = f^{-1}(F)$ **에 대하여, 가정에 의해,**

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

$$= \overline{f(f^{-1}(F))} = \overline{F} \overset{F:\text{ 폐집합}}{=} F$$

$\Longrightarrow f(\overline{A})) \subset F$

$\Longrightarrow f^{-1}(f(\overline{A})) \subset f^{-1}(F)$ **, by 양변에** f^{-1}

$\Longrightarrow f^{-1}(f(\overline{A})) \subset A$ **, by** $A = f^{-1}(F)$

$\Longrightarrow \overline{A} \subset A$ **, by** $\overline{A} \subset f^{-1}(f(\overline{A}))$

$\Longrightarrow \overline{A} = A$ **, by** $A \subset \overline{A}$

$\Longrightarrow A$**는 폐집합**

$\Longrightarrow f^{-1}(F)$ **는 폐집합, by** $A = f^{-1}(F)$

정리 7-3 에 의하여 f **는 연속함수이다.** ■

점에서 연속

함수 $f: X \to Y$ 은 점 p에서 연속이다.

정의
$\Leftrightarrow$ (A가 점 $f(p)$의 근방 $\Rightarrow$ $f^{-1}(A)$가 점 p의 근방)

[정리7-5]

함수 $f: X \to Y$ 는 연속함수이다.

$\Leftrightarrow$ 함수 $f: X \to Y$ 은 X의 모든 점에서 연속이다.

(증명)

($\Rightarrow$) $\forall p \in X$ 에 대하여,

A가 점 $f(p)$의 근방

$\Rightarrow$ $\exists G$ 개집합 : $f(p) \in G \subset A$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(G)$ 개집합 : $p \in f^{-1}(G) \subset f^{-1}(A)$, (이유: f : 연속)

$\Rightarrow$ $f^{-1}(A)$가 점 p의 근방

그러므로 함수 f는 점 p에서 연속이다.

($\Leftarrow$) G**를** Y**에서 개집합이라고 가정하자.**

$p \in f^{-1}(G) \Rightarrow f(p) \in G$ **: 개집합**

$\Rightarrow G$**는** $f(p)$**의 근방, (이유:** $f(p) \subset G$(**개집합**) $\subset G$ **)**

$\Rightarrow f^{-1}(G)$**는** p**의 근방, (이유:** f**는**p**에서 연속)**

$\Rightarrow \exists A_p$**개집합 :** $p \in A_p \subset f^{-1}(G)$

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{p \in f^{-1}(G)} A_p$$ **: 개집합들의 합집합이므로 개집합이다.**

따라서 $\forall$ **개집합** $G \subset Y$, $f^{-1}(G)$ **: 개집합 in** X **이다.**

즉 f**는 연속함수이다.** ■

점렬연속

함수 $f : X \rightarrow Y$ **은 점** p**에서 점렬연속이다.**

정의

$\Leftrightarrow$ **(** **점렬** $< a_n > \rightarrow a \Rightarrow$ **점렬** $< f(a_n) > \rightarrow f(a)$ **)**

[명제7-6] 모든 연속함수는 점렬연속이다.

(증명) 함수 $f: X \to Y$ 를 연속함수라고 가정하자.

점렬 $a_n \to a$ 라고 가정하자.

$f(a) \in G$ **개집합** $\subset Y$

$\Rightarrow a \in f^{-1}(G)$ **개집합** $\subset X$ **, (이유: f 는 연속함수)**

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathrm{N} : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in f^{-1}(G))$ **, (이유: $a_n \to a$)**

$\Rightarrow f(a_n) \in G$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathrm{N} : (n > n_0 \Rightarrow f(a_n) \in G)$

그러므로 점렬 $f(a_n) \to f(a)$ 이다. ■

주의 : 명제7-6 의 역은 성립하지 않는다.

(이유) [예제7.3]에서 실수집합위의 여가산위상공간 $(\mathrm{R}, \mathscr{F})$ 에서 수렴하는

점렬 $< a_n >$ 은 항상 $< a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n_0}, p, p, p, \cdots >$와 같은 형식이다.

$(\mathrm{R}, \mathscr{F})$ 에서 실수 보통위상공간으로 가는 함수

$$f:(\mathrm{R},\mathscr{F}) \to (\mathrm{R}, \mathcal{U}),\ f(x)=x$$

를 고려하면 점렬연속이 될 수 밖에 없다. 그런데 $f^{-1}((0,1))=(0,1)$ 인데 $(0,1)$ 은 보통위상 $\mathcal{U}$ 에서는 개집합이지만, $\mathscr{F}$ 에서는 $(0,1)^c = (-\infty,0] \cup [1,\infty)$ 은 가산집합이 아니므로 개집합이 아니다. ■

열린함수(개함수)

함수 $f: X \to Y$ 은 **열린함수**이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ (G가 개집합 in $X \Rightarrow f(G)$가 개집합 in Y)

닫힌함수(폐함수)

함수 $f: X \to Y$ 은 **닫힌함수**이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ (G가 폐집합 in $X \Rightarrow f(G)$가 폐집합 in Y)

[참고]

함수 $f: X \to Y$ **은 연속함수이다.**

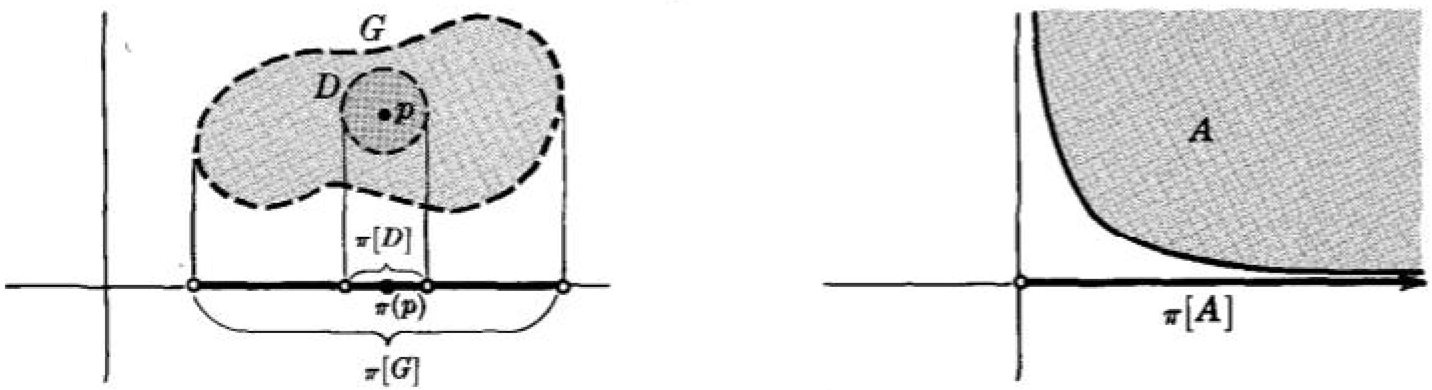
$\Leftrightarrow$ **(** G**가 개집합 in** $Y \Rightarrow$ $f^{-1}(G)$**가 개집합 in** X **)**

$\Leftrightarrow$ **(** G**가 폐집합 in** $Y \Rightarrow$ $f^{-1}(G)$**가 폐집합 in** X **)**

[참고]

연속함수, 개함수, 폐함수는 모두 다르다.

[예제2.1] 사영함수 $\pi : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, $\pi((x,y)) = x$ **은 개함수, but 폐함수 아님.**



(풀이) 집합 A의 여집합 A^c은 개집합이므로 A는 폐집합이다. 그런데 $\pi[A]$는 폐집합이 아니다. 그러므로 사영함수 π는 폐함수가 아니다.

위상적 함수

함수 $f: X \to Y$ 는 위상적이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ **f 는 쌍연속이다.**

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ **f 가 연속함수이고 개함수이다.**

위상동형

위상공간 X와 Y 는 위상동형 이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ **$\exists$ 전단사 함수 $f: X \to Y$: f 가 쌍연속**

[예제3.1] 실수집합 $\mathbb{R}$ 는 구간 $(-1,1)$과 위상동형이다. 왜냐하면 함수

$f:(-1,1)\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\tan(\frac{\pi}{2}x)$ 는 전단사이고,

f 와 f^{-1} 가 모두 연속이기 때문이다.

[명제7-7] "위상동형" 은 동치 관계이다.

위상적 성질 or 위상불변성

위상공간 $(X,\Im)$가 어떤 집합에 관한 성질 P를 만족할 때, $(X,\Im)$와 위상동형인 공간들도 성질 P를 같이 만족하는 경우, P를 위상적(topological)성질 또는 위상불변(topological invariant)성이라고 한다.

[예제4.1] "길이"와 "유계성"은 위상적 성질이 아니다. 왜냐하면 실수집합 $\mathbb{R}$ 는 구간 $(-1,1)$과 위상동형이기 때문이다.

[예제4.2] "코시열" 은 위상적 성질이 아니다. 왜냐하면,

$f:(0,\infty)\to(0,\infty),\ f(x)=\dfrac{1}{x}$ 는 위상동형 함수인데,

$<1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots>$ 는 코시열이지만

$<f(1),f(\dfrac{1}{2}),f(\dfrac{1}{3}),\cdots> \ = \ <1,2,3,\ \cdots>$은 아니다.

유도된(생성된)위상

$\{(Y_i,\Im_i)\mid i\in I\}$ 를 위상공간들의 족이라 하고, 어떤 집합 X 에서 정의된 함수 $f_i:X\to Y_i$ 들이 주어졌을 때, 모든 함수 f_i 를 연속으로 만드는 X 위의 위상을 만들어 보자. f_i 들을 연속으로 만들려면 최소한

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I}\{f^{-1}(H)\mid H\in\Im_i\}$$

의 원소들은 집합 X에서 개집합이 되어야 한다. 집합 $\mathcal{S}$ 에 의하여 생성된 X 위에서의 위상 $\Im$ 을 함수 f_i 들에 의한 **유도된위상** 또는 **생성된위상** 라고 한다.

[정리7-8]

(1) 모든 함수 $f_i : (X, \Im) \to (Y_i, \Im_i)$ 는 연속함수이다.

(2) $\Im$ 는 f_i 들을 연속으로 만드는 X 위의 모든 위상들의 공통집합이다.

(3) $\Im$ 는 f_i 들을 연속으로 만드는 X 위의 위상들중에서 가장 작다.

(4) $\mathcal{S}$ 는 위상 $\Im$ 의 부분기저이다.

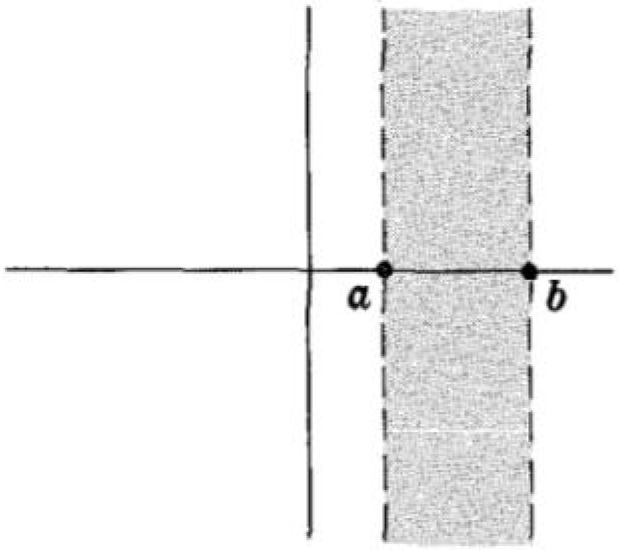
정의 부분기저

위에서 $\mathcal{S}$를 위상 $\Im$ 의 **정의부분기저**라고 한다.

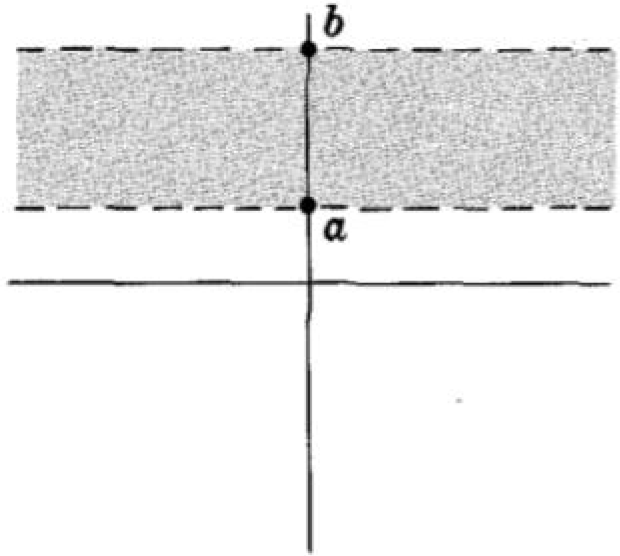
[예제5.1] π_1 과 π_2 를 평면 R^2 에서 R 로 가는 사영함수, 즉

$$\pi_1((x,y)) = x,\ \pi_2((x,y)) = y$$

라고 하면 R 에서의 개구간 (a,b) 들의 π_1 에 관한 역상은 평면 R^2 상에서 열린 수직띠이고, π_2 에 관한 역상은 평면 R^2 상에서 열린 수평띠인데, 이 열린 수직띠와 열린 수평띠들이 R^2 상 보통위상의 부분기저를 이루므로, R^2 상 보통위상은 함수 π_1 과 π_2 를 연속으로 만드는 최소 위상이다.



$\pi_1^{-1}[(a, b)]$



$\pi_2^{-1}[(a, b)]$

8장 거리공간과 노름공간

거리공간(metric space)

집합 X와 아래 성질을 만족하는 **거리함수** $d : X \times X \to \mathrm{R}$ 가 있을 때, (X,d) 를 **거리공간**이라고 한다.

(M1) $d(a,b) \geq 0$

(M2) $d(a,b) = d(b,a)$: 대칭성

(M3) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$: 삼각부등식

(M4) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

[예제1.1]

$$d : \mathrm{R} \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$$
$$d(a,b) = |a - b|$$

로 정의되는 함수 d 를 실직선 R 상의 **보통거리**라고 한다.

$$d : \mathrm{R}^2 \times \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}$$
$$d(a,b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, \ \ a = (a_1, a_2), \ b = (b_1, b_2)$$

로 정의되는 함수 d 를 평면 R^2 상의 보통거리라고 한다.

[예제1.2] 공집합이 아닌 X 에 대하여 함수,

$$\forall a,b \in X, \ d(a,b) \overset{\text{정의}}{=} \begin{cases} 0, & a = b \\ 1, & a \neq b \end{cases}$$

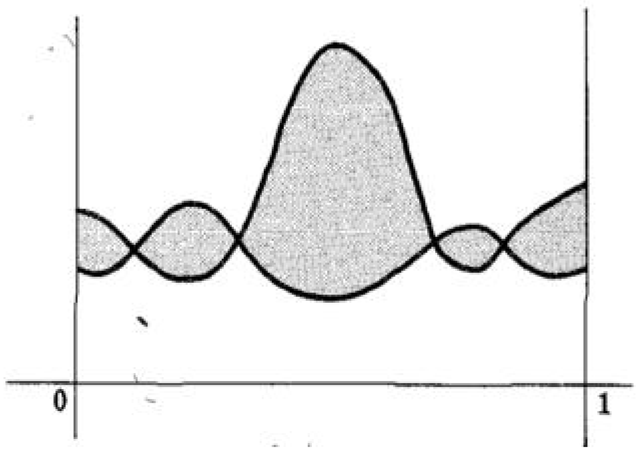
는 X 위에 거리가 되는데, 이를 X 위의 자명거리(trivial metric)이라 한다.

[예제1.3]

$\mathcal{C}[0,1] = \{ f : [0,1] \rightarrow \mathrm{R} \mid f$: **연속함수** $\}$ **이고,**

$\mathcal{C}[0,1]$ **위에서 거리 d 는 다음과 같이 정의한다.**

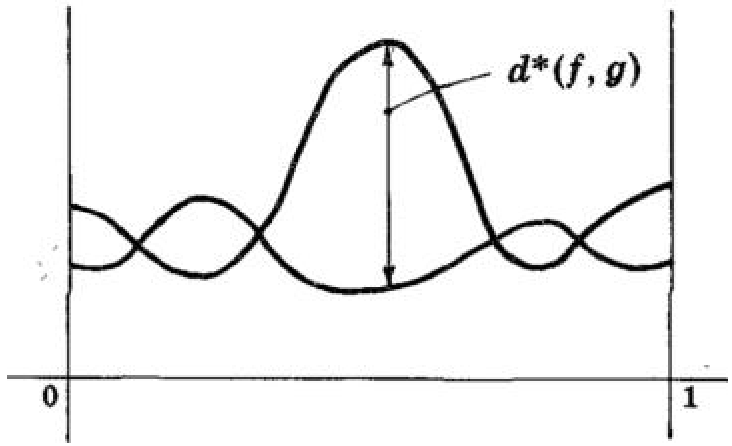
$$d(f,g) \overset{\text{정의}}{=} \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx$$



[예제1.4]

$\mathcal{C}[0,1] = \{\, f : [0,1] \to \mathrm{R} \mid f:$ **연속함수** $\}$ **이고,**

$\mathcal{C}[0,1]$ **위에서 거리** d^* **는 다음과 같이 정의한다.**



$$d^*(f,g) \overset{\text{정의}}{=} \sup\{\, |f(x) - g(x)| \mid x \in [0,1] \}$$

[예제1.5] 평면 R^2 **위의 점** $a = (a_1, a_2),\ b = (b_1, b_2)$ **에 대하여,**

$$d_1(a,b) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

$$d_2(a,b) = (|a_1 - b_1|^2 + |a_2 - b_2|^2)^{1/2}$$

$$d_p(a,b) = (|a_1 - b_1|^p + |a_2 - b_2|^p)^{1/p}$$

$$d_\infty(a,b) = \max(|a_1 - b_1|,\ |a_2 - b_2|)$$

로 정의된 함수들 d_1, d_2, d_p, d_∞ **은 각각 다른 거리들이다.**

점과 집합간의 거리

d를 집합 X상의 거리라고 할 때, 점 $p\in X$와 공집합이 아닌 X의 부분집합 A 사이의 거리는 다음과 같이 표기되고 정의된다.

$$d(p,A) \overset{\text{정의}}{=} \inf\ \{d(p,a) \mid a\in A\}$$

집합과 집합간의 거리

공집합이 아닌 집합 A,B 사이의 거리는

$$d(A,B) \overset{\text{정의}}{=} \inf\ \{d(a,b) \mid a\in A,\ b\in B\}$$

집합의 지름

공집합이 아닌 집합 A의 지름은

$$d(A) \overset{\text{정의}}{=} \sup\ \{d(a,b) \mid a\in A,\ b\in A\}$$

유계집합과 비유계집합

지름이 유한한 집합을 유계집합,

지름이 무한한 집합을 비유계집합이라고 한다.

[예제2.2] 실수집합 R 에서의 구간 $A=[0,1)$, $B=(1,2]$ 에 대하여,

d 가 보통거리($d(a,b)=|a-b|$) 이면, $d(A,B)=0$ 이다.

d^* 가 자명거리이면, $d^*(A,B)=1$ 이다.

[명제8-1] A,B 가 공집합이 아닌 X 의 부분집합들이고, $p\in X$ 일 때,

(1) $d(p,A)$, $d(A,B)$, $d(A)$ 들은 음이 아닌 실수이다.

(2) $p\in A \Rightarrow d(p,A)=0$

(3) $A\cap B\neq\phi \Rightarrow d(A,B)=0$

(4) A 가 유한집합 $\Rightarrow A$ 는 유계집합

(2)~(4) 의 역은 성립하지 않는다.

특별규약

$$d(p,\phi) = \infty\,,\ d(A,\phi) = \infty,\ d(\phi) = -\infty$$

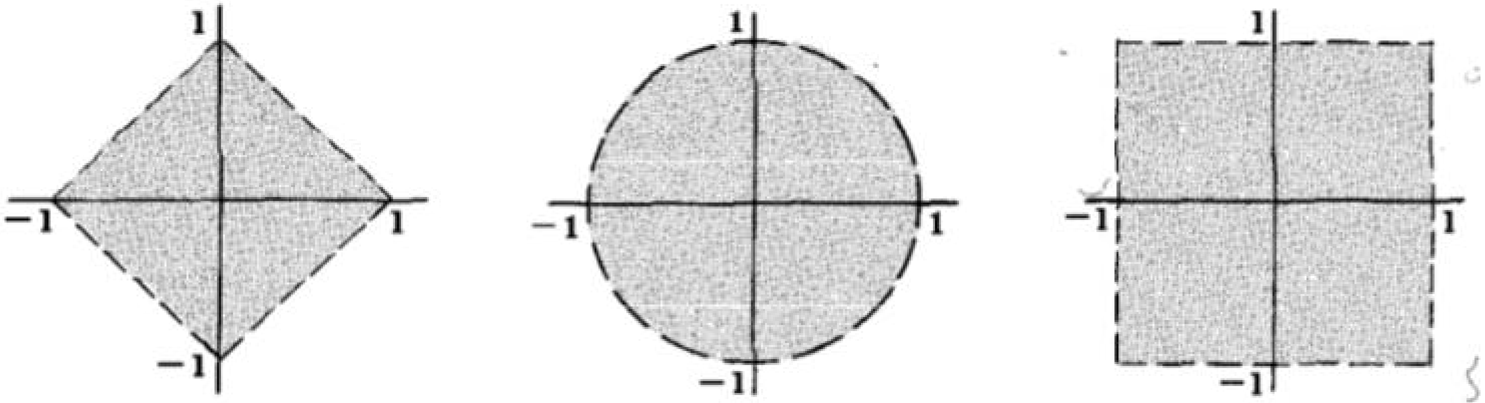
열린구

d 를 집합 X 위의 거리라고 할 때, 점 $p \in X$와 실수 $\delta > 0$ 에 대하여,

$$S(p,\delta) = \{x \mid d(p,x) < \delta\}$$

를 **열린구**라고 한다.

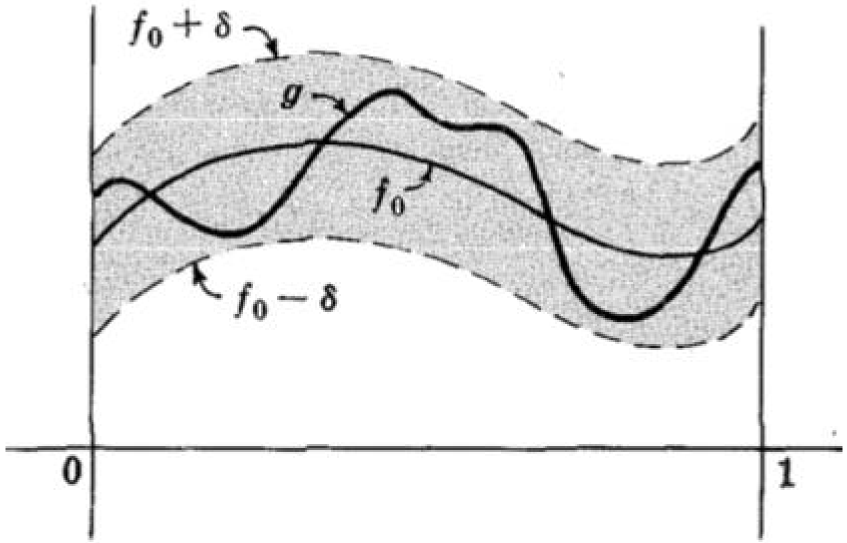
[예제3.1] 예제1.5 의 $d_1,\ d_2,\ d_\infty$ 에 대한 반지름이 1 열린구는 각각.



[예제3.4] $\mathcal{C}[0,1]=\{\, f:[0,1]\to \mathrm{R} \mid f:$ **연속함수** $\}$ **이고,** $\mathcal{C}[0,1]$ **위의 거리**

$$d(f,g)= \sup\{\, |f(x)-g(x)| \mid x\in[0,1]\}$$

에 대하여, $f_0\in \mathcal{C}[0,1]$**를 중심으로 하는 열린구** $S(f_0,\delta)$**는 다음과 같다.**



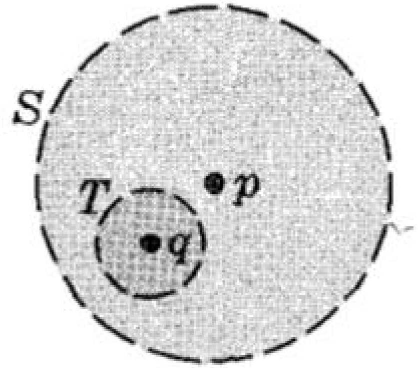
(풀이) $g\in S(f_0,\delta) \Rightarrow d(f_0,g)<\delta$

$$\Rightarrow \sup\{\, |f_0(x)-g(x)| \mid x\in[0,1]\}<\delta$$

$$\Rightarrow \forall\, x\in[0,1],\ |f_0(x)-g(x)|<\delta$$

[보조정리8-2] 중심이 p 이고 반지름이 δ인 열린구 $S = S(p,\delta)$ 에 대하여,

$\forall q \in S, \exists T = S(q,\varepsilon)$ **열린구 : $T \subset S$**



(증명)

$$q \in S(p,\delta) \Rightarrow d(p,q) < \delta$$

$$\Rightarrow 0 < {}^{\exists}\varepsilon < \delta - d(p,q) \quad \text{--(1)}$$

$$x \in S(q,\varepsilon) \Rightarrow d(x,q) < \varepsilon \quad \text{--(2)}$$

$\Rightarrow d(x,p) \le d(x,q) + d(q,p)$ **by 삼각부등식**

$< \varepsilon + d(p,q)$ **by (2), d: 대칭성**

$< (\delta - d(p,q)) + d(p,q)$ **by (1)**

$= \delta$

$$\Rightarrow d(x,p) < \delta$$

$$\Rightarrow x \in S(p,\delta)$$

그러므로 $T = S(q,\varepsilon) \subset S(p,\delta) = S$ ■

[참고] $A = \bigcup_{x \in A} A_x \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists A_x : x \in A_x \subset A$

(증명)

($\Longrightarrow$) $x \in A \;\Longrightarrow\; x \in \bigcup_{t \in A} A_t$

$\Longrightarrow\; \exists A_{t_0} : x \in A_{t_0}$ **(** $\subset \bigcup_{t \in A} A_t = A$ **)**

$\Longrightarrow\; \exists A_x : x \in A_x \subset A$

($\Longleftarrow$) $\forall x \in A, \exists A_x : x \in A_x \subset A$

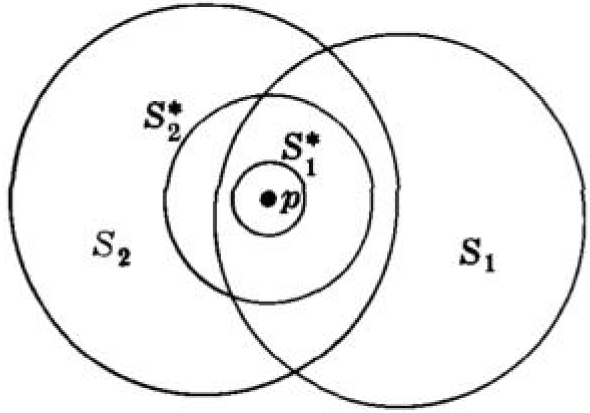
$\Longrightarrow$ **(** $\forall x \in A,\; x \in \bigcup_{x \in A} A_x$ **)** $\wedge \bigcup_{x \in A} A_x \subset A$

$\Longrightarrow$ **(** $A \subset \bigcup_{x \in A} A_x$ **)** $\wedge \bigcup_{x \in A} A_x \subset A$

$\Longrightarrow\; A = \bigcup_{x \in A} A_x$

[보조정리8-3] 두 열린구의 교집합은 열린구들의 합집합으로 표시된다.

(증명) S_1 **과** S_2 **를 임의의 두 열린구라고 하자.**



$S_1 \cap S_2 = \phi$ **라면** $S_1 \cap S_2 = \phi = \bigcup_{i \in \phi} S_i$ **로 표시된다.**

$S_1 \cap S_2 \neq \phi$ **라 하자.**

$p \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow p \in S_1 \ \wedge \ p \in S_2$

$\Rightarrow \ \exists \, S(p, \varepsilon_1)$ **열린구 :** $S(p, \varepsilon_1) \subset S_1$

$\exists \, S(p, \varepsilon_2)$ **열린구 :** $S(p, \varepsilon_2) \subset S_2$ **, by 보조정리8-2**

$\Rightarrow$ **만약** $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ **이라면,** $S(p, \varepsilon_1) \subset S(p, \varepsilon_2)$ **(**$\subset S_2$**)**

그래서 $S(p, \varepsilon_1) \subset S_1 \cap S_2$**.**

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ **라면** $S(p, \varepsilon_2) \subset S_1 \cap S_2$

$\Rightarrow \ \exists \, S_p$ **열린구 :** $p \in S_p \subset S_1 \cap S_2$

그러므로 $S_1 \cap S_2 = \bigcup_{p \in S_1 \cap S_2} S_p$ **: 열린구들의 합집합이다.** ■

[정리8-4] 거리공간 (X,d)에서 모든 열린구들의 집합은 X위의 어떤 위상의 기저가 될 수 있다.

(증명)

정리6-1 의 기저의 자격 :

(1) $X = \bigcup_{p \in X} S(p,1)$

(2) 보조정리8-3 에 의하여 임의의 두 열린구들의 교집합은 다른 열린구들의 합집합으로 표시될 수 있다. ■

거리위상공간

모든 거리공간은 열린구들의 족을 기저로 갖는 위상을 가진 위상공간이 된다. 이 위상을 거리위상 또는 거리에 의해 유도된 위상이라고 하고, 이 위상공간을 거리위상공간이라고 한다.

[예제4.1] **실수 집합 $\mathbb{R}$ 위에 정의된 거리 $d(x,y)=|x-y|$ 에 대하여, 열린구는 $(p-\varepsilon,\ p+\varepsilon)$ 는 열린구간 (a,b) 이 된다. 따라서 열린구간들을 기저로 하는 실수 집합 $\mathbb{R}$ 위에 보통위상은 거리 d 에 의하여 유도된 위상이다.**

[예제4.2] **d 를 집합 X 위의 자명거리라고 하자. 임의의 $p\in X$ 에 대하여 열린구 $S(p,1/2)$ 는 단일원 집합 $\{p\}$ 이므로 모든 단일원들이 개집합이 되고, 따라서 모든 집합이 개집합이 된다. 즉 자명거리가 유도하는 위상은 X 위의 이산위상이다.**

[정리8-5] 거리공간 X 위의 한 점 $p \in X$ 에 대하여, 열린구들의 가산족 $\{S(p,1), S(p,1/2), S(p,1/3), \cdots\}$ 은 p 에서 국소기저를 이룬다.

(증명)

p 를 포함한 임의의 개집합 G 에 대하여, 열린구들이 기저를 이루므로 $\exists$ 열린구 $S_i, i \in I : G = \bigcup_{i \in I} S_i$ 이다. $p \in G$ 이므로 $\exists i_0 : p \in S_{i_0}$ 이다.

보조정리8-2 에 의하여, $\exists \varepsilon > 0 : S(p, \varepsilon) \subset S_{i_0}$ 이다. 그런데 $\exists n_0 : 1/n_0 < \varepsilon$ 이므로 $S(p, 1/n_0) \subset S(p, \varepsilon)$ 이 되어 $S(p, 1/n_0) \subset G$ 이 된다. 따라서 가산족 $\{S(p,1), S(p,1/2), S(p,1/3), \cdots\}$ 은 p 에서 국소기저를 이룬다. ■

Sup (최소상계, 상한, 윗경계) in 순서집합

a는 집합 S의 **상계** $\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in S,\ x \le a$

a는 집합 S의 **최소상계** $\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ ① a는 S의 상계

($a = \mathrm{Sup} S$) ② (t는 S의 상계 $\Longrightarrow$ $a \le t$)

Inf (최대하계, 하한, 아랫경계) in 순서집합

a는 집합 S의 **하계** $\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in S,\ a \le x$

a는 집합 S의 **최대하계** $\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ ① a는 S의 하계

($a = \mathrm{Inf} S$) ② (t는 S의 하계 $\Longrightarrow$ $t \le a$)

명제] **(1)** (t 는 S 의상계 $\Longrightarrow\ a \le t$) $\Leftrightarrow$ ($\forall\varepsilon > 0,\ \exists x \in S : a - \varepsilon < x$)

(2) (t 는 S 의하계 $\Longrightarrow\ t \le a$) $\Leftrightarrow$ ($\forall\varepsilon > 0,\ \exists x \in S : x < a + \varepsilon$)

(증명) (1)

((t 는 S 의 상계) $\Longrightarrow\ a \le t$)

$\Leftrightarrow$ ((t 는 S 의 상계가 아니다) $\vee\ a \le t$)

$\Leftrightarrow$ (($\exists x \in S,\ t < x$) $\vee\ a - t \le 0$)

$\Leftrightarrow$ ($a - t \le 0\ \vee$ ($\exists x \in S,\ t < x$))

$\overset{\varepsilon = a - t}{\Leftrightarrow}$ ($\varepsilon \le 0\ \vee$ ($\exists x \in S,\ a - \varepsilon < x$))

$\Leftrightarrow$ ($\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists x \in S : a - \varepsilon < x$)

$\Leftrightarrow$ ($\forall\varepsilon > 0$, $\exists x \in S : a - \varepsilon < x$)

[정리8-6] 거리공간 X의 부분집합 A의 폐포는 A에서 거리 0(영)인 점들의 집합이다.

(증명)

$d(p,A)=0$

$\Leftrightarrow$ **Inf** $\{d(p,x)\,|\,x\in A\} = 0$

$\Leftrightarrow$ 0은 $S=\{d(p,x)\,|\,x\in A\}$ **의 하계(이것은 항상 참)이고**

$\forall\,\varepsilon>0\,,\ \exists\, d(p,x)\in S:\ d(p,x)<0+\varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, x\in A: d(p,x)<0+\varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, x\in A: x\in S(p,\varepsilon)$

$\Leftrightarrow$ $\forall\,\varepsilon>0,\ S(p,\varepsilon)\cap A\neq\phi$

$\Leftrightarrow$ $p\in{}^{\forall}G$ **개집합,** $G\cap A\neq\phi$

$\Leftrightarrow$ $p\in\overline{A}$ $\blacksquare$

[따름정리8-7] 거리공간 X의 모든 유한집합은 폐집합이다.

(증명)

$\forall p \in X, \quad \overline{\{p\}} = \{x \mid d(x, \{p\}) = 0\}$ **by 정리8-6**

$= \{x \mid d(x, p) = 0\}$

$= \{p\}$ **by 거리의 성질**

그러므로 $\overline{\{p\}} = \{p\}$ **--- (1)**

A**가 유한집합이면,** $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$

$= \bigcup_{x \in A} \overline{\{x\}}$ **by (1)**

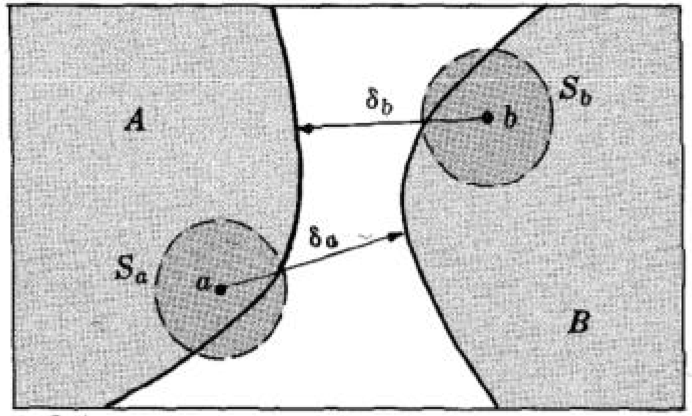
그러므로 A**는 폐집합들의 유한 합집합이다.**

따라서 A**는 폐집합이다.**

[정리8-8] **거리공간에서** A, B **는** $A \cap B = \phi$ **인 폐집합이면,**

$$\exists\, G, H \text{ 개집합 : } (A \subset G) \wedge (B \subset H) \wedge (G \cap H = \phi)$$

(증명)



$a \in A \Rightarrow a \notin B$ **by (** $A \cap B = \phi$ **)**

$\Rightarrow d(a, \overline{B}) = \delta_a > 0$ **by 정리8-6**

$\Rightarrow d(a, B) = \delta_a > 0$ **by** $\overline{B} = B$

$S_a = S(a, \delta_a/3)$ **라 하고,**

$G = \bigcup_{a \in A} S_a$ **라 하면,** G**는 개집합이고,** $A \subset G$ **이다.**

비슷하게 $b \in B$ **에 대하여** $S_b = S(b, \delta_b/3)$**,** $H = \bigcup_{b \in B} S_b$ **라 하면,**

H**는 개집합이고** $B \subset H$ **이다. 이제** $G \cap H = \phi$ **임을 보이자.**

$p \in G \cap H \Rightarrow \exists\, a_0 \in A, \exists\, b_0 \in B : (p \in S_{a_0}, p \in S_{b_0})$

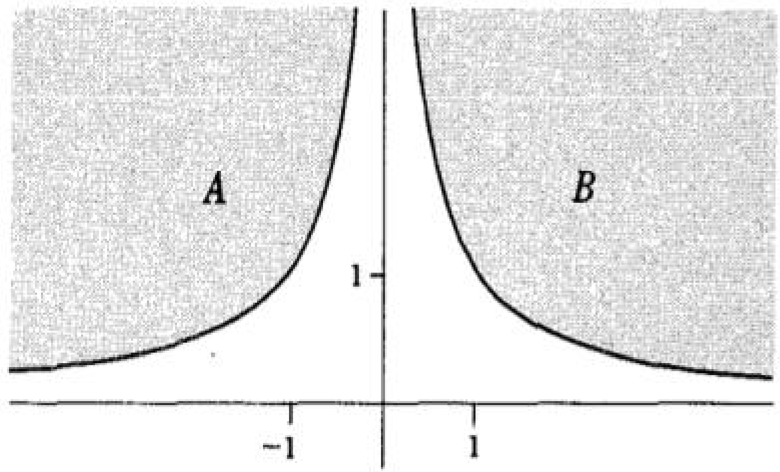
$$\Rightarrow (\ d(a_0, p) < \delta_{a_0}/3,\ d(b_0, p) < \delta_{b_0}/3\ )$$

$d(a_0, b_0) = \varepsilon > 0$ **이라면,**

$$\begin{aligned} \varepsilon = d(a_0, b_0) &\le d(a_0, p) + d(p, b_0) \\ &< \delta_{a_0}/3 + \delta_{b_0}/3 \\ &\le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &= 2/3\,\varepsilon \end{aligned}$$

그러므로 $\varepsilon < 2/3\varepsilon$!! **따라서** $G \cap H = \phi$ **이어야 한다.** ■

[예제5.1] A, B**는 폐집합이고** $A \cap B = \phi$ **이지만** $d(A, B) = 0$ **이다.**

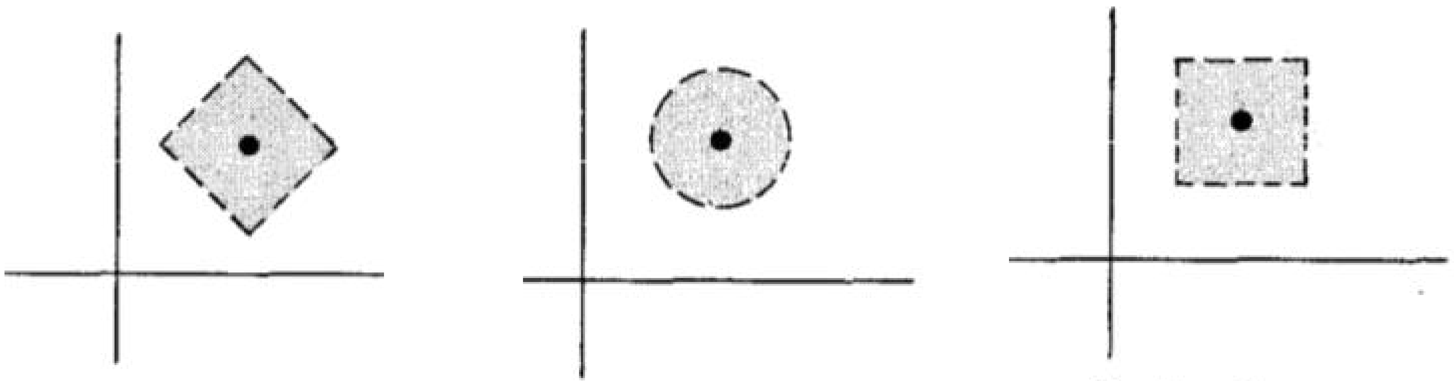


동치거리

집합 X위의 두 거리 d와 d^*가 같은 위상을 유도할 때, d와 d^*는 **동치**(equivalent) 라고 한다.

[예제6.1] 평면 R^2 에 정의된 다음 거리들은 모두 보통위상을 유도하므로 서로 동치이다.

$$d_1(a,b) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$
$$d_2(a,b) = (|a_1 - b_1|^2 + |a_2 - b_2|^2)^{1/2}$$
$$d_p(a,b) = (|a_1 - b_1|^p + |a_2 - b_2|^p)^{1/p}$$
$$d_\infty(a,b) = \max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|)$$



$S_{d_1}(p,\delta)$ $S_{d_2}(p,\delta)$ $S_{d_\infty}(p,\delta)$

[예제6.2] 공집합이 아닌 집합 X 에 정의된 다음 두 거리 d_1, d_2 는 모두 이산위상을 유도하므로 서로 동치이다.

$$\forall a,b \in X,\ d_1(a,b) \overset{\text{정의}}{=} \begin{cases} 0, & a=b \\ 1, & a \neq b \end{cases}$$

$$\forall a,b \in X,\ d_2(a,b) \overset{\text{정의}}{=} \begin{cases} 0, & a=b \\ 2, & a \neq b \end{cases}$$

[명제8-9] "d 와 d^* 는 동치이다"라는 관계는 일종의 동치관계이다.

거리동형공간

거리공간 (X,d) 와 (Y,e) 사이에 전단사함수 $f: X \to Y$ 가 존재하고, 거리가 보존되면, 즉,

$$\forall a,b \in X,\ d(a,b) = e(f(a), f(b))$$

이면 (X,d) 는 (Y,e) 와 거리동형이라고 한다.

[정리8-10] 두 거리공간이 거리동형이면, 또한 위상동형이다.

역은 성립하지 않는데, 반례를 들자면

[예제8.1] 같은 기수를 갖는 집합 X, Y **에 대하여, 두 거리공간**
(X,d), (Y,e) **의 두 거리** d_1,d_2 **는 모두 이산위상을 유도하여**
위상동형이지만, 거리의 크기가 다르기 때문에 거리동형이 아니다.

$$\forall a,b \in X,\ d_1(a,b) \overset{\text{정의}}{=} \begin{cases} 0, & a=b \\ 1, & a \neq b \end{cases}$$

$$\forall a,b \in Y,\ d_2(a,b) \overset{\text{정의}}{=} \begin{cases} 0, & a=b \\ 2, & a \neq b \end{cases}$$

유클리드 공간

실수집합 R의 m개의 적집합 R^{m} 위에 정의 되는 거리,

$$d(a,b)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+\ \cdots\ +(a_m-b_m)^2},\quad {}^{\forall}a,b\in\mathrm{R}^{\mathrm{m}}$$

를 유클리드 거리(Euclidean metric)이라고 한다. 또한 거리공간 $(\mathrm{R}^{\mathrm{m}},\mathrm{d})$ 을 m차원 유클리드공간이라고 한다.

[정리 8-11] m 차원 유클리드공간은 거리공간이다.

힐버트공간

집합 $\mathrm{R}^{\infty}=\left\{(a_1,a_2,\ \cdots)\mid a_i\in\mathrm{R},\ \sum_{i=1}^{\infty}a_i^2<\infty\right\}$ 위에 정의된 함수

$$d(a,b)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}$$

은 거리가 되고, $\mathrm{H} = (\mathrm{R}^{\infty}, d)$ 를 **힐버트공간(Hilbert Space)** 또는 l_2**-공간** (l_2-space) 이라고 한다.

[정리8-12] 힐버트공간 H 은 거리공간이다.

[예제9.2] 힐버트공간의 부분공간

$$\mathrm{H_m} = \{(a_1, a_2, \cdots, a_m, 0, 0, 0, \cdots) \in \mathrm{H} \mid a_i \in \mathrm{R}\}$$

은 m 차원 유클리드공간 $\mathrm{R^m}$ 과

$$f : \mathrm{H_m} \to \mathrm{R^m}$$

$$f((a_1, a_2, \cdots, a_m, 0, 0, 0, \cdots)) = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$$

로서 거리동형이고, 따라서 위상동형이다.

[예제 9.3] $p_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, \delta_{3k} \cdots)$ **여기에서** $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases}$

일 때 힐버트공간 내의 점렬 $< p_n >$ **을 생각하자.**

$$p_1 = (1, 0, 0, 0, \cdots)$$
$$p_2 = (0, 1, 0, 0, \cdots)$$
$$p_3 = (0, 0, 1, 0, \cdots)$$
$$\vdots$$
$$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$$
$$\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0, \cdots)$$

$\forall n \in \mathrm{N}$, **점렬** $< p_k >$**의 각 성분공간으로의 사영** $< \pi_n(p_k) >$ **은** 0 **으로 수렴하지만,** $\forall k \in \mathrm{N}$, $d(p_k, \mathbf{0}) = 1$ **이므로 점렬** $< p_k >$**은** 0 **으로 수렴하지 않는다.**

[예제9.4] $\mathrm{H}^* = \left\{(0, a_1, a_2, \cdots) \mid a_i \in \mathrm{R},\ \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty\right\}$ **로 정의될 때 함수**

$$f : \mathrm{H} \to \mathrm{H}^*$$
$$f((a_1, a_2, \cdots)) = (0, a_1, a_2, \cdots)$$

에 의해 힐버트공간 H는 그 자신의 진부분집합 H^*와 거리동형이다.

거리공간에서 수렴

거리공간 (X, d)의 점렬 $< a_1, a_2, \cdots >$ 은 $b \in X$로 수렴한다고한다.

$$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathrm{N} : (n > n_0 \Rightarrow d(a_n, b) < \varepsilon)$$

거리공간사이의 연속함수

거리공간 사이의 함수 $f : (X, d) \to (Y, d^*)$ 은 $p \in X$에서 연속이라 한다.

$$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (\ d(p, x) < \delta \Rightarrow d^*(f(p), f(x)) < \varepsilon\ )$$

노름공간

선형공간(벡터공간) X에 대하여 다음을 만족하는 함수 $\| \, \| : X \to \mathbb{R}$ 가 있을 때, $(X, \| \, \|)$ 을 노름공간(Normed Space)이라고 한다.

$\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall v, w, \in X$ 에 대하여,

(N1) $\|v\| \geq 0$

(N2) $\|kv\| \leq |k| \, \|v\|$

(N3) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

(N4) $\|v\| = 0 \;\Leftrightarrow\; v = 0$

[정리8-13] 노름공간 $(X, \| \; \|)$은 거리공간이다.

(설명)

$d(x,y) = \|x-y\|$ 로 정의된 함수 d가 거리가 된다.

[예제10.1] 실수의 적집합 R^m 은 덧셈과 스칼라곱에

$$< a_1, a_2, \cdots, a_m > + < b_1, b_2, \cdots, b_m > = < a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_m + b_m >$$

$$k < a_1, a_2, \cdots, a_m > = < ka_1, ka_2, \cdots, ka_m >$$

대하여 선형공간이 된다.

유클리드 노름

$$\| < a_1, a_2, \cdots, a_m > \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2}$$

$p-$ 노름

$$\| < a_1, a_2, \cdots, a_m > \|_p = (|a_1|^p + |a_2|^p + \cdots + |a_m|^p)^{1/p}$$

∞ 노름 (sup 노름)

$$\| < a_1, a_2, \cdots, a_m > \|_\infty = \max(|a_1|, a_2|, \cdots |a_m|)$$

[예제10.3] **선형공간** $\mathcal{C}[0,1] = \{\, f : [0,1] \to \mathrm{R} \mid f :$ **연속함수** $\}$ **에서**

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

로 정의된 함수 $\|\ \|$**는 일종의 노름이 된다.**

(증명)

[N1] $\|f\| \geq 0$ **임은 명백하다.**

[N2] $$\|cf\| = \int_0^1 |c\,f(x)|\,dx = |c|\int_0^1 |f(x)|\,dx = |c|\ \|f\|$$

[N3] $$\|f+g\| = \int_0^1 |f(x)+g(x)|\,dx$$

$$\leq \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|)dx$$

$$= \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx$$

$$= \|f\| + \|g\|$$

[N4]

$f = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f(x)|dx = 0$ **(이유 : f 가 연속함수)**

$$\Leftrightarrow \|f\| = 0$$

[예제10.4] 선형공간 $\mathcal{C}[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathrm{R} \mid f :$ 연속함수 $\}$ 에서

$$\|f\|_\infty = \mathbf{sup}\{ |f(x)| \mid x \in [0,1] \}$$

로 정의된 함수 $\|\ \|_\infty$ 는 일종의 노름이 된다.

[예제10.6] 선형공간 $\mathrm{R}^{\infty} = \left\{ (a_1, a_2, \cdots) \mid a_i \in \mathrm{R},\ \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty \right\}$ **에서**

$$\| < a_n > \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2}$$

로 정의된 함수 $\| \ \|$**는 일종의 노름이 된다.**