수치해석 (2학기)

김상배 교수

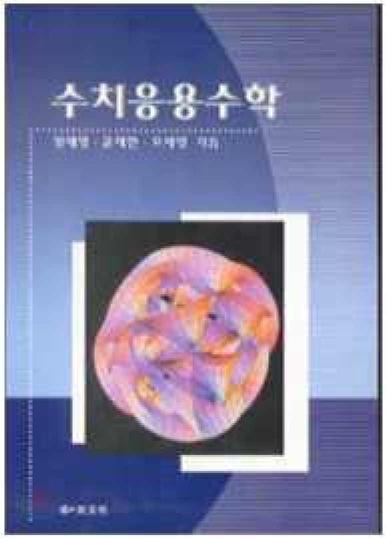
xxx@hnu.kr

http://sbk.hnu.kr/Lectures

010-XXXX-7867

문자메세지

카톡(공부내용 질문)



교과서: 수치응용수학, 정세영외2인, 경문사

수치해석 : 해석학적으로 얻기 어려운 문제의 답을 수치적으로 근사값을 구하려는 연구.

예)

Input interpretation:

series	e^x	point	$x = 0$

Series expansion at x=0:

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + O(x^6)$$

(converges everywhere)

Taylor 급수

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 무한번 미분가능일 때 무한급수

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\ \cdots$$

을 $x=a$ 에서 f 의 Taylor급수라 한다.

특히 $a=0$ 일 때 f 의 Taylor급수를 특히 Maclaurin급수라 한다.

Taylor의 정리

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 을 포함하는 구간에서 $(n+1)$ 번 미분가능하면,

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\ \cdots\ +\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

이고 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ 가 되는 점 ξ 가 a 와 x 사이에 존재한다.

함수들의 멱급수 전개

Maclaurin 급수	수렴구간
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$-\infty < x < +\infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$	$-\infty < x < +\infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	$-\infty < x < +\infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$-1 < x \le 1$
$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$	$-1 < x \le 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$	$-1 < x \le 1$
$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$	$-\infty < x < +\infty$
$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$	$-\infty < x < +\infty$

한남대학교 수학과 김상배교수

[예제] e **의 값을 소수점이하 넷째자리까지 정확히 구하여라.**

(풀이)

모든 x **에 대하여**

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0 < c < x)$$

이므로 $x = 1$ **이면** $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$ **이다.**

$c < 1$**이므로** $|R_n| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} \right| = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!}$ **이다.**

여기서 $e < 3$ **이므로** $|R_n| < \frac{3}{(n+1)!}$ **이다.**

소수점이하 4째자리까지 정확하려면

$$|R_n| < \frac{3}{(n+1)!} < 0.5 \times 10^{-4} = 0.00005$$ **이어야 하고**

$n = 8$ **이면 위 식을 만족하므로**

$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 2.7183$ **이다.** ■

제5장 근사함수

근사함수

어떤 함수와 가깝다고 여겨져서 그 함수를 대신하여 사용하는 함수를 근사함수 (approximation function)라고 한다.

(예) $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$

근사함수의 이용

(예) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx \approx \int_1^2 (-\frac{3}{4}(x-1)+1)dx$

함수 $g(x) = -\frac{3}{4}(x-1)+1$ 는 함수 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 의 근사함수 인데, $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$ 이고 $g(x)$ 는 $f(x)$ 보다 "간편한" 1차 함수이다. (→사다리꼴공식)

노름의 이용

함수들 사이에의 "가까움", 즉 거리를 측정하는 방법으로 여러 가지 노름이 사용된다.

한남대학교 수학과 김상배교수

(예) f **가 구간** $[a,b]$ **에서 연속 함수일 때, 함수간의 거리는** $d(f,g)=\|f-g\|$ **로 측정하며, 함수의 노름의 예들은 다음과 같은 것들이 있다.**

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|w(x)dx$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_\infty = \max\{\, |f(x)| \,:\, a \le x \le b\}$$

여기에서 $w(x)(\ge 0)$ **를 "가중함수"(weight function)라고 한다.**

근사함수 찾기

주어진 함수 $f \in C[a,b]$ **와** $V(\subset C[a,b])$ **에 대하여,**

$$\|f-g^*\| \le \|f-g\|, \forall\, g \in V$$

을 만족하는 $g^* \in V$ **를 찾아라.**

(예) 사다리꼴 공식도 함수공간의 특정 부분공간(예를 들어 1차함수들의 공간) V **안의 함수들 중에서 원래 함수와 제일 가까운 함수로 해석될 수 있다.**

보간법 (사이를 보충한다)

주어진 점들과 함수값들을 만족하는 근사 함수를 정하는 방법.

보간함수 of 데이터

주어진 데이터 $\{(x_i, y_i) \mid i = 0, 1, \cdots, n\}$에 대하여 보간 조건

$$P_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \cdots, n$$

을 만족하는 함수 P_n 를 **보간함수**라고 한다. x_i 들을 **마디점**이라고 한다.

보간함수가 다항함수인 경우 특히 **보간다항식**이라고 한다.

보간함수 of 함수

주어진 마디점들 $\{x_i \mid i = 0, 1, \cdots, n\}$과 함수 f에 대하여 보간 조건

$$P_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \cdots, n$$

을 만족하는 함수 P_n 을 **함수 f의 보간함수**라고 한다. 또는 함수 P_n 은 **함수 f를 보간한다** 라고도 한다.

(예) 다항식

$$p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

은 데이터 $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$ **의 보간다항식이다.**

[정리5.1] 마디점 $x_0, x_1, \cdots x_n$ **이 서로 다른 값이면, 보간 조건**

$$P_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \cdots, n$$

을 만족하는 n**차 이하의 다항식은 오직 하나 존재한다.**

(증명)

$i = 0, 1, \cdots, n$**에 대하여 정의된 함수**

$$\ell_i(x) \overset{\text{정의}}{=} \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

는 $x_0, x_1, \cdots x_n$**들이 서로 다른 값이므로** $\ell_i(x_i) = 1,\ \ell_i(x_j) = 0,$ **for** $j \neq i$ **임을 알 수 있다.** ℓ_i**함수들은** n**차 다항식이므로 함수**

$$P_n(x) \overset{\text{정의}}{=} \sum_{i=0}^{n} y_i \, \ell_i(x)$$

도 n차 이하 다항식이고,

$$P_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, \ell_i(x_k) = y_k, \quad \forall\, k = 0, 1, \cdots, n$$

임을 확인할 수 있다. 즉 보간다항식의 존재성이 증명되었다.
유일성을 증명하기 위하여 $Q_n(x)$가 n차 이하의 또 다른 보간다항식이라면, 다항식

$$R_n(x) \overset{\text{정의}}{=} P_n(x) - Q_n(x)$$

도 역시 n차 이하의 다항식이고, $\forall\, k = 0, 1, \cdots, n,$

$$R_n(x_k) = P_n(x_k) - Q_n(x_k) = y_k - y_k = 0,$$

이다. 대수학의 기본정리에 따르면, 영함수가 아닌 n차 이하의 다항식은 서로 다른 $n+1$개의 근을 가질 수 없으므로, $R_n(x) \equiv 0$이 되므로 유일성이 증명되었다. ■

라그랑지형 보간다항식

마디점들 $x_i,\ i=0,1,\cdots,n$에 대하여 각각 정의된 함수

$$\ell_i(x) \overset{\text{정의}}{=} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

를 **라그랑지 다항식**(Lagrange polynominal)이라 한다.

라그랑지 다항식 $\ell_i(x)$들의 일차결합으로 이루어진 보간다항식

$$P_n(x) \overset{\text{정의}}{=} \sum_{i=0}^{n} y_i\, \ell_i(x)$$

를 **라그랑지형 보간다항식**이라고 한다.

[예제5.1] 마디점 $\{0,1,2\}$에서 함수 $f(x)=e^x-1$ 의 2차 라그랑지 보간다항식을 구하고, $f(1.5)$의 근사값을 구하라.

(풀이) (컴퓨터 숙제 : P202 #5(3) $f(0.25)$)

각 마디점에 대응하는 2차 라그랑지 다항식을 구하면

$$\ell_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)},\ \ell_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)},\ \ell_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}$$

이므로 2차 라그랑지 보간다항식은

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\,\ell_i(x) \\
&= f(0)\,\ell_0(x)+f(1)\,\ell_1(x)+f(2)\,\ell_2(x) \\
&= (e^0-1)\,\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}+(e-1)\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}+(e^2-1)\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \\
&= 0+(e-1)\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}+(e^2-1)\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}
\end{aligned}$$

$f(1.5)$ **의 근사값은**

$$\begin{aligned}
f(1.5) &\approx P_2(1.5) \\
&= (e-1)\frac{(1.5-0)(1.5-2)}{(1-0)(1-2)}+(e^2-1)\frac{(1.5-0)(1.5-1)}{(2-0)(2-1)} \\
&= (e-1)(1.5)(0.5)+(e^2-1)(1.5)(0.5)/2 \approx 3.6846 \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

멱급수형 보간다항식

다항식의 가장 보편적인 형태는 다음과 같은 멱급수형 보간다항식이다.

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

보간 조건

$$P_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \cdots, n$$

을 만족하는 계수 a_i들을 구하려면, 연립방정식

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$V\mathbf{a} = \mathbf{y}$$

을 풀어야 한다. 행렬 V를 Vandermonde 행렬이라고 하는데, $x_0, x_1, \cdots x_n$들이 서로 다르면, 행렬 V는 역행렬이 존재하는 정칙행렬이 된다고 알려져 있다. 따라서 해가 존재하지만, 불량행렬이어서 정확한 해를 얻기가 어려운 점이 있다. 가장 효율적인 방법은 나중에 다루게 될 뉴톤형 보간다항식이다.

보간다항식 방식의 장단점

1) 라그랑지형 : 직관적. 수치미분과 수치적분에 유용.
점 하나를 추가하면 처음부터 다시 계산해야 하는 단점.

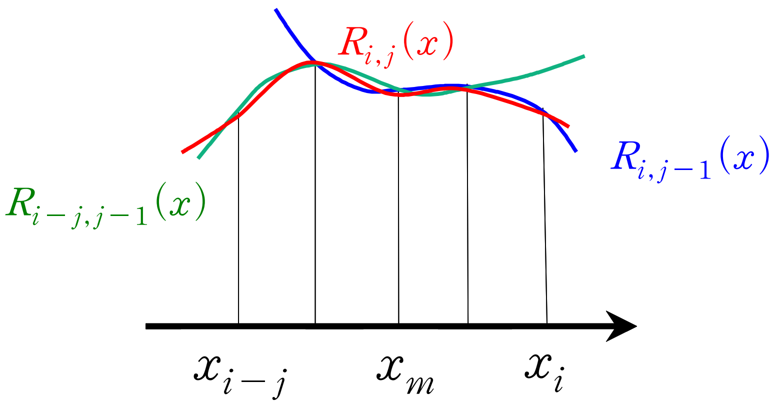
2) 뉴톤형 : 점 하나를 추가하면 처음부터 다시 계산할 필요없이 항 하나만 추가함.

Neville의 방법

보간다항식 전체를 구하지 않고, 한 점에서의 근사값만을 구하는 경우, 라그랑지 방법을 사용하되 처음부터 다시 계산하지 않고, 최근 계산값들을 이용하여 새 근사값을 계산하는 일종의 반복법이다. $0 \le j \le i$ 를 만족하는 자연수 i, j에 대하여 데이터 $\{(x_m, f(x_m)) \mid i-j \le m \le i\}$ 라그랑지 보간다항식을 $R_{i,j}(x)$ 이라고 하면,

$R_{i,0}(x_i) = f(x_i)$ 이고,

$$R_{i,j}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-j} - x_i} R_{i-1,j-1}(x) + \frac{x - x_{i-j}}{x_i - x_{i-j}} R_{i,j-1}(x)$$



임을 증명할 수 있다.

(증명)

1) $m=i-j$ **일 때,** $R_{i,j}(x_{i-j})=R_{i-1,j-1}(x_{i-j})=f(x_{i-j})$

2) $i-j<m<i$ **일 때,**

$$R_{i,j}(x_m)=\frac{x_m-x_i}{x_{i-j}-x_i}R_{i-1,j-1}(x_m)+\frac{x_m-x_{i-j}}{x_i-x_{i-j}}R_{i,j-1}(x_m)$$

$$=\frac{x_i-x_m}{x_i-x_{i-j}}f(x_m)+\frac{x_m-x_{i-j}}{x_i-x_{i-j}}f(x_m)$$

$$=f(x_m)$$

3) $m=i$ **일 때,** $R_{i,j}(x_i)=R_{i,j-1}(x_i)=f(x_i)$ ■

$R_{i,j}(x)$ **들은** $R_{i,j-1}(x)$ **들로부터 차수가 하나 올라간 다항식이고, 식을 정리하면,**

$$R_{i,j}(x)=\frac{(x-x_{i-j})R_{i,j-1}(x)-(x-x_i)R_{i-1,j-1}(x)}{x_i-x_{i-j}}$$

이 된다.

$$\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{c}{\longrightarrow \text{차수증가}} \\
f(x_0)=R_{0,0} & & & \\
f(x_1)=R_{1,0} & R_{1,1} & & \text{마디점증가} \\
f(x_2)=R_{2,0} & R_{2,1} & R_{2,2} & \downarrow \\
f(x_3)=R_{3,0} & R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3}
\end{array}$$

[예제5.2]

마디점 $x_m = m+1,\ \forall m = 0,1,\cdots,k$ **에서 함수** $f(x)=1/x$**의 보간다항식을** $P_k(x)$ **라고 하자. Neville 방법을 이용하여** $P_k(2.5),\ k=0,1,2,3$ **을 구하라.**

(풀이) (컴퓨터 숙제: p203 #13)

$$R_{i,0}(2.5) = f(x_i) = \frac{1}{x_i} = \frac{1}{i+1} \qquad R_{0,0}(2.5) = \frac{1}{0+1} = 1.0 = P_0(2.5)$$

$$R_{1,1}(2.5) = [(2.5-x_0)R_{1,0}(2.5)-(2.5-x_1)R_{0,0}(2.5)]/(x_1-x_0) = 0.25 = P_1(2.5)$$

$$R_{2,1}(2.5) = [(2.5-x_1)R_{2,0}(2.5)-(2.5-x_2)R_{1,0}(2.5)]/(x_2-x_1) = 0.41\dot{6}$$

$$R_{2,2}(2.5) = [(2.5-x_0)R_{2,1}(2.5)-(2.5-x_2)R_{1,1}(2.5)]/(x_2-x_0) = 0.375 = P_2(2.5)$$

$$R_{3,1}(2.5) = [(2.5-x_2)R_{3,0}(2.5)-(2.5-x_3)R_{2,0}(2.5)]/(x_3-x_2) = 0.375$$

$$R_{3,2}(2.5) = [(2.5-x_1)R_{3,1}(2.5)-(2.5-x_3)R_{2,1}(2.5)]/(x_3-x_1) = 0.40625$$

$$R_{3,3}(2.5) = [(2.5-x_0)R_{3,2}(2.5)-(2.5-x_3)R_{2,2}(2.5)]/(x_3-x_0) = 0.390625 = P_3(2.5)$$

[정리5.2] $f \in C^{n+1}[a,b]$ **이고** $P_n(x)$**는 구간** $[a,b]$**에서 서로 다른 마디점** $x_0, x_1, \cdots, x_n$ **에서** f**의 보간다항식이라면,** $\forall x \in [a,b]$ **에 대하여,**

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} W(x), \quad W(x) \equiv \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i) \quad \text{--- } \mathbf{(1)}$$

을 만족하는 $\xi_x \in (a,b)$**가 존재한다.**

(증명)

(경우1) $(0 \le {}^{\exists} i \le n) : x = x_i$

$W(x) = 0$ **이고,** P_n**은** f**의 보간다항식이므로** $f(x_i) = P_n(x_i)$**이 되어 (1) 이 성립한다.**

(경우2) $(0 \le {}^{\forall} i \le n),\ x \ne x_i$

다음 함수 $g(t)$**를 정의하자.**

$$g(t) \overset{\text{정의}}{=} f(t) - P_n(t) - [f(x) - P_n(x)] \frac{W(t)}{W(x)} \quad \text{--- } \mathbf{(2)}$$

$f, P_n \in C^{n+1}[a,b]$**이므로** $g \in C^{n+1}[a,b]$**이고,** $g(x_k) = 0, \forall k = 0, 1, \cdots, n$**이고** $g(x) = 0$**이므로** g**는 구간** $[a,b]$**에서 적어도** $n+2$ **개의 서로 다른 실근을 갖는다.**

따라서 Rolle의 정리에 의하여 도함수 g'는 구간 $[a,b]$에서 적어도 $n+1$ 개의 서로 다른 실근을 갖는다. $g \in C^{n+1}[a,b]$이므로 $g' \in C^n[a,b]$이다. 다시 Rolle의 정리에 의하여 도함수 $g^{(2)}$은 구간 $[a,b]$에서 적어도 n개의 서로 다른 실근을 갖는다. 이 과정을 반복하면, $g^{(2+(n-1))}$은 구간 $[a,b]$에서 적어도 $n-(n-1)$개의 서로 다른 실근을 갖는다. 즉 $g^{(n+1)}(\xi_x)=0$을 만족하는 ξ_x가 구간 (a,b)안에 적어도 하나 존재한다. 식 (2)로부터

$$g^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-P_n^{(n+1)}(t)-[f(x)-P_n(x)]\frac{W^{(n+1)}(t)}{W(x)}$$

여기서 $P_n(t)$와 $W(t)$은 각각 n차와 $n+1$차 다항식이므로 $P_n^{(n+1)}(t)\equiv 0$이고 $W^{(n+1)}(t)=(n+1)!$ 이다. 그러므로 $t=\xi_x$를 대입하면,

$$g^{(n+1)}(\xi_x)=f^{(n+1)}(\xi_x)-[f(x)-P_n(x)]\frac{(n+1)!}{W(x)}$$

여기서 $g^{(n+1)}(\xi_x)=0$이므로,

$$f^{(n+1)}(\xi_x)-[f(x)-P_n(x)]\frac{(n+1)!}{W(x)}=0$$

이것을 정리하면 식(1)의 결론을 얻을 수 있다. ■

위 정리에 따르면 만약 $|f^{(n+1)}(\xi_x)| \le M$ **을 만족하는 상수** M **이 존재한다면, 오차의 한계는**

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|W(x)|, \quad W(x) \equiv \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

와 같이 구할 수 있다.

[예제5.3] 구간 $[0,1]$ **에 속하는 임의의 6개의 마디점에서 함수** $f(x) = \cos x + \sin x$ **의 보간다항식을** $P_5(x)$ **라 할 때, 오차** $|f(x) - P_5(x)|, \ x \in [0,1]$ **의 한계를 구하라.**

(풀이)

$f^{(6)}(x) = -\cos x - \sin x$ **(책오류수정)** **참고 : Wolfram : 6th derivative of cos(x)+ sin(x)**

이므로 $|f(x) - P_5(x)| = \dfrac{|\cos\xi + \sin\xi|}{6!} \Pi_{k=0}^{5}|x - x_k|, \ \xi \in (0,1)$ **이다.**

여기서 $|\cos\xi + \sin\xi| = |\sqrt{2}\sin(\xi + \pi/4)| \le \sqrt{2}$ **,**

$\Pi_{k=0}^{5}|x - x_k| \le 1, \ (0 \le x, x_k \le 1)$

이므로 $|f(x) - P_5(x)| = \dfrac{\sqrt{2}}{6!} \approx 0.001964$ ■

뉴톤형 보간다항식

마디점 $x_0, x_1, \cdots, x_n$**에 대해, 아래 다항식을 함수** f**의 뉴톤형 보간다항식이라 한다.**

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) & \\ + a_2(x - x_0)(x - x_1) & \\ \cdots\cdots & \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) & \quad \textbf{----(1)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i)$$

뉴톤형 보간다항식에서는 마디점을 하나 추가할 경우, 기존데이터에 새로운 항 하나만 더 추가하여 계산하면 된다. 여기에서

$$f[x_0, x_1, \cdots x_k] \overset{\text{정의}}{=} a_k \qquad \textbf{---(2)}$$

를 함수f**의 분할차분(divided difference)라고 한다. 여기서** $f[x_0, x_1, \cdots x_n] \equiv a_n$ **는** $P_n(x)$**의 최고차항 계수임을 알 수 있다. 일반적으로 마디점** $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}$ **(**$0 \le i \le n-k$**)들에 대하여 분할 차분을** $f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}]$**로 표시한다.**

[명제] 분할차분은 아래와 같이 순차적으로 구할 수 있다.

1) $f[x_i] = f(x_i),\ \ 0 \le {}^{\forall} i \le n$

2) $f[x_0, x_1, \cdots, x_k] \ = \dfrac{f[x_1, x_2, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$

(증명)

정의(2)에 의하여 $f[x_0] = a_0$ **이고, 식(1)로부터** $P_n(x_0) = a_0$ **이다. 그러므로 보간조건** $f(x_0) = P_n(x_0)$ **로부터,** $f[x_0] = f(x_0)$ **를 얻는다. 마디점** x_i **를 마디점** x_0 **라고 해도 같은 논리가 성립하므로**

$$f[x_i] = f(x_i),\ \ 0 \le {}^{\forall} i \le n$$

임을 알 수 있다. Neville 의 방법처럼, 데이터 $\{(x_m, f(x_m)) \mid 0 \le m \le k\}$ **에 대하여** $k-1$ **차 보간다항식**

$$P_{k-1}(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \cdots, k-1 \quad \textbf{--- (1)}$$

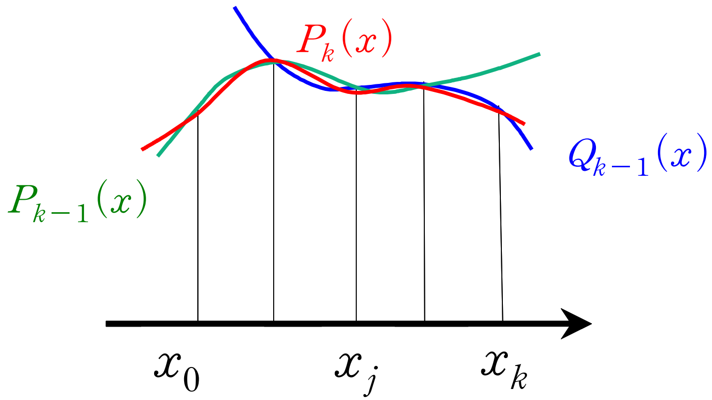
$$Q_{k-1}(x_i) = f(x_i),\ i = 1, 2,\ \cdots\ ,\ k \quad \textbf{--- (2)}$$

으로부터 k **차 보간다항식**

$$P_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} Q_{k-1}(x) - \frac{x - x_k}{x_k - x_0} P_{k-1}(x) \quad \textbf{---(3)}$$

을 만들면

$$P_k(x) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \cdots, k$$



이 된다. 왜냐하면

i) $P_k(x_0) = (0)Q_{k-1}(x_0) - (-1)P_{k-1}(x_0)$

$= P_{k-1}(x_0) = f(x_0)$ **by (1)**

ii) $1 \le j \le k-1$**에 대하여,**

$$P_k(x_j) = \frac{x_j - x_0}{x_k - x_0} Q_{k-1}(x_j) - \frac{x_j - x_k}{x_k - x_0} P_{k-1}(x_j)$$

$$= \frac{x_j - x_0}{x_k - x_0} f(x_j) - \frac{x_j - x_k}{x_k - x_0} f(x_j) \quad \textbf{by (2)(1)}$$

$$= f(x_j)$$

iii) $P_k(x_k) = (1)Q_{k-1}(x_k) - (0)P_{k-1}(x_0)$

$= Q_{k-1}(x_k) = f(x_k)$ **by (2)**

이기 때문이다. 한편 (3)으로부터, $P_k(x)$는 다음과 같다.

$$P_k(x) = \frac{1}{x_k - x_0}[\,(x-x_0)Q_{k-1}(x) - (x-x_k)P_{k-1}(x)]$$

따라서 $P_k(x)$의 최고차항의 계수 $f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$은 다음 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \cdots, x_k] &= \frac{1}{x_k - x_0}(Q_{k-1}\text{의최고차항의계수} - P_{k-1}\text{의최고차항의계수}) \\ &= \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

[주의] 마디점 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}$ ($0 \le i \le n-k$)에 대하여도 같은 논리로,

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

로 쓸 수 있다.

분할차분표

x_i	$f[x_i]$	$f[\,,\,]$	$f[\,,\,,\,]$	$f[\,,\,,\,,\,]$	$f[,,,,]^*$
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]^*$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]^*$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_2,x_3,x_4]^*$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_3,x_4]^*$			
x_4^*	$f[x_4]^*$				

[예제5.6] 함수 $f(x)=\sqrt{x}$ **의 함수표를 보간하는 뉴톤 분할차분형 다항식** $P_3(x)$ **를 구하라. 또한** $f(2.4)=1.549193$ **을 추가하여** $P_4(x)$ **를 구하고,** $x=2.15$ **에서 각각 근사값을 구하여, 참값** $\sqrt{2.15}=1.46628782\cdots$ **와 비교하여라.** **숙제 p215#1-(2)**

x	2.0	2.1	2.2	2.3
$f(x)$	1.414213	1.449137	1.483239	1.516575

(풀이) 주어진 값들에 대하여 분할차분표를 만들면 다음과 같다.

x_i	$f[x_i]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$	$f[,,,,]^*$
2.0	1.414213	0.34924	-0.04110	0.00933	-0.00333^*
2.1	1.449137	0.34102	-0.03830	0.00800^*	
2.2	1.483239	0.33336	-0.03590^*		
2.3	1.516575	0.32618^*			
2.4^*	1.549193^*				

위에서 * 표시는 추가된 항목을 표시한다. 먼저 3차 뉴톤 분할차분형 다항식을 $P_3(x)$을 구하면

$$
\begin{aligned}
P_3(x) = 1.414213 + 0.34924(x-2.0) \\
-0.04110(x-2.0)(x-2.1) \\
+0.00933(x-2.0)(x-2.1)(x-2.2)
\end{aligned}
$$

$x = 2.15$에의 근사값은 $f(2.15) \approx P_3(2.15) = 1.4662873$ 이다.

한 점을 추가한 4차 뉴톤 분할차분형 다항식 $P_4(x)$은

$$\begin{aligned} P_4(x) = 1.414213 + 0.34924(x-2.0) \\ -0.04110(x-2.0)(x-2.1) \\ +0.00933(x-2.0)(x-2.1)(x-2.2) \\ -0.00333(x-2.0)(x-2.1)(x-2.2)(x-2.3) \end{aligned}$$

로 주어지고, $x = 2.15$**에의 근사값은** $f(2.15) \approx P_4(2.15) = 1.4662872$ **이다.** ■

[정리5.3] 만약 $f \in C^n[a,b]$**이고, 구간** $[a,b]$**안의 마디점** $x_0, x_1, \cdots, x_n$**들 서로 다른 실수이면,**

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

를 만족하면 ξ**가** (a,b)**안에 존재한다.**

(증명)

마디점 $x_0, x_1, \cdots, x_n$**에서 함수** f**의 보간다항식을** P_n**이라고 하면 함수**

$$g(x) \equiv f(x) - P_n(x)$$

는 보간 조건에 의하여 $n+1$개의 실근을 갖는다. 즉

$$g(x_0)=g(x_1)= \cdots =g(x_n)=0$$

이다. Rolle 의 정리에 의하여 도함수 $g^{(1)}(x)$는 n개의 실근을 갖는다. 또 다시 $g^{(2)}(x)$는 $n-1$개의 실근을 갖고, 이 과정을 계속하여 $g^{(n)}(x)$는 1개의 실근을 갖는다. (참고 : $g^{(0)}$가 $n+1$개 이면 $g^{(n)}$는 1개) 따라서

$$g^{(n)}(\xi)=0$$

을 만족하는 ξ가 (a,b)안에 존재한다. 즉

$$f^{(n)}(\xi)-P_n(\xi)=0$$

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(\xi) &= \frac{d^n}{dx^n}(f[x_0,x_1,\cdots,x_n][(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})+(n-1)\text{차식}]\Big|_{x=\xi} \\
&= \frac{d^n}{dx^n}(f[x_0,x_1,\cdots,x_n][x^n+(n-1)\text{차식}]\Big|_{x=\xi} \\
&= n!\, f[x_0,x_1,\cdots,x_n] \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

균등분할

마디점들이 일정한 간격으로 주어진 균등분할인 경우, 즉

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$0 \le {}^{\forall} k \le n,\ x_k = a + kh$$

분할차분은 좀 더 간단히 계산될 수 있다.

전향차분

자연수 j에 대하여 $f_j = f(x_j)$라 할 때, 전향차분(forward difference)

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$$

$$\Delta^k f_j = \Delta(\Delta^{k-1} f_j),\ \forall k \ge 2$$

로 정의된다. ■

전향차분과 분할차분의 관계는 다음과 같다.

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{1}{h}\Delta f_0$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{\frac{\Delta f_1}{h}-\frac{\Delta f_0}{h}}{2h}=\frac{1}{2!\,h^2}\Delta^2 f_0$$

. . . .

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{1}{k!\,h^k}\Delta^k f_0$$ **---(1)**

분할점들이 더 일반적으로 $x_j, x_{j+1}\ \cdots, x_{j+n}$ **일 경우,**

$$f[x_j,x_{j+1},\cdots,x_{j+k}]=\frac{1}{k!h^k}\Delta^k f_j$$

로 쓸 수 있다. 뉴톤형 보간다항식

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f[x_0,x_1,\cdots,x_k]\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)$$ **---(2)**

에서 $x_i=x_0+ih$ **이고,** $x=x_0+sh$**로 놓으면,**

$$\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i) = \prod_{i=0}^{k-1} h(s-i) = h^k \prod_{i=0}^{k-1}(s-i) = h^k k! \binom{s}{k} \quad \textbf{---(3)}$$

이 된다. 여기에서 조합기호 $\binom{s}{k}$는 다음과 같이 정의된 것이다.

$$\binom{s}{k} = \begin{cases} \dfrac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1)}{k!} = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(s-i), & k > 0 \\ 1, \quad k=0 \end{cases}$$

뉴톤 전진차분형 보간다항식

식(1),(3)을 식(2)에 대입하면, 뉴톤 전진차분형 보간다항식

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!h^k} \Delta^k f_0 \; h^k k! \binom{s}{k} = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f_0 \binom{s}{k}$$

을 얻는다.

전진차분표

보간다항식에 필요한 전진차분표는 분할차분표에서 있었던 나눗셈이 필요없다.

x_j	$\Delta^0 f$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	$f(x_0)$	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0^*$
x_1	$f(x_1)$	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1^*$	
x_2	$f(x_2)$	Δf_2	$\Delta^2 f_2^*$		
x_3	$f(x_3)$	Δf_3^*			
x_4^*	$f(x_4)^*$				

[예제5.7] 함수 $f(x)=\sqrt{x}$ 의 함수표를 보간하는 다항식 $P_3(x)$의 뉴톤 전진차분형을 구하고 $P_3(2.15)$를 계산하여 참값 $\sqrt{2.15}=1.46628782\cdots$ 와 비교하여라.

(풀이) 숙제 p217#19-(1)

$x=2.15,\ x_0=2.0,\ s=1.5,\ h=0.1$ 이고 전진차분표는 다음과 같다.

x_j	$\Delta^0 f$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
2.0	1.414213	0.034924	-0.000822	0.000056
2.1	1.449137	0.034102	-0.000766	
2.2	1.483239	0.033336		
2.3	1.516575			

따라서 뉴톤 전진차분형 다항식 $P_3(x) = P_3(x_0 + sh)$ **는**

$$P_3(x) = P_3(x_0 + s\,h)$$
$$= 1.414213 + 0.034924\binom{s}{1} - 0.000822\binom{s}{2} + 0.000056\binom{s}{3}$$

이고, $P_3(2.15)$ **를 계산하면 다음과 같이 주어진다.**

$$P_3(2.15) = P_3(2 + 1.5 \times 0.1)$$
$$= 1.414213 + 0.034924\binom{1.5}{1} - 0.000822\binom{1.5}{2} + 0.000056\binom{1.5}{3}$$
$$= 1.4662873$$

■

후향차분

자연수 j**에 대하여** $f_j = f(x_j)$**라 할 때, 후향차분(backward difference)**

$$\nabla f_j = f_j - f_{j-1}$$

$$\nabla^k f_j = \nabla(\nabla^{k-1} f_j), \ \forall k \geq 2$$

로 정의된다. ■

뉴톤 후진차분형 보간다항식

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f_n$$ ■

Hermite 보간다항식

각 마디점에서, 함수값뿐만아니라 고계도함수값까지도 보간하는 다항식. 즉 함수 f**와 서로 다른 마디점** $x_i (0 \leq i \leq n)$**들과 자연수** $m_i (0 \leq i \leq n)$**들이 주어졌을 때,**

$$H^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \ (0 \leq j \leq m_i - 1, \ 0 \leq i \leq n) \quad \text{---(1)}$$

을 만족하는 $N(=m_0+m_1+\cdots+m_n-1)$차 이하의 다항식 $H(x)$를 **Hermite 보간다항식**이라고 한다.

[예제 5.9] 다음을 만족하는 3차 Hermite 보간 다항식 $H_3(x)$를 구하여라.

$$x_0 \neq x_1,\ H_3(x_j)=f(x_j),\ H_3'(x_j)=f'(x_j),\ j=0,1$$

(풀이1) $H_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ 로 놓으면 위의 보간 조건은

$$a_0+x_0a_1+x_0^2a_2+x_0^3a_3=f(x_0)$$

$$a_1+2x_0a_2+3x_0^2a_3=f'(x_0)$$

$$a_0+x_1a_1+x_1^2a_2+x_1^3a_3=f(x_1)$$

$$a_1+2x_1a_2+3x_1^2a_3=f'(x_1)$$

이다. 위 연립방정식을 행렬을 이용하여 $Ay=b$로 표시된다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \end{bmatrix},\ y = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f'(x_0) \\ f(x_1) \\ f'(x_1) \end{bmatrix}$$

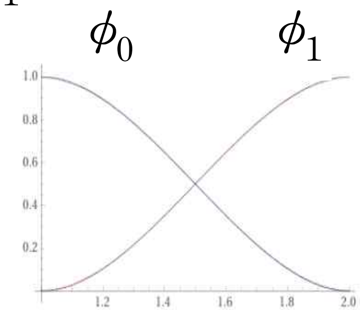
만약 $x_0 \neq x_1$ **이면 계수행렬** A **는 정칙임을 보일 수 있다.** A **가 정칙이면 방정식** $Ay = b$ **는 유일한 근을 구할 수 있다.**

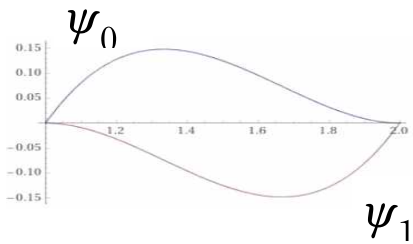
(풀이2 : 라그랑지형) 3 **차 보간다항식** $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ **들이**

$i = 0,1,\ j = 0,1$ **에 대하여,**

(함수값1) $\phi_i(x_j) = \delta_{ij},\ \phi_i'(x_j) = 0$

(미분값1) $\psi_i(x_j) = 0,\ \psi_i'(x_j) = \delta_{ij}$





을 만족하면 다음 3 **차 보간다항식** $H_3(x)$ **은 보간조건 (1)을 만족함을 알 수 있다.**

$$H_3(x) = f(x_0)\,\phi_0(x) + f(x_1)\,\phi_1(x) + f'(x_0)\,\psi_0(x) + f'(x_1)\,\psi_1(x)$$

이제 $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ 를 구하자. $\phi_0(x_1) = \phi_0{}'(x_1) = 0$ **이므로** x_1 **은** ϕ_0 **의 중근이므로**

$$\phi_0(x) = (cx + d)(x - x_1)^2$$

로 표시된다. 남은 두 조건

$$\phi_0(x_0) = (cx_0 + d)(x_0 - x_1)^2 = 1$$

$$\phi_0{}'(x_0) = c(x_0 - x_1)^2 + 2(c_0 x_0 + d)(x_0 - x_1) = 0$$

로부터 c **와** d **를 구할 수 있다. 나머지도 같은 방법으로 다음과 같이 구할 수 있다.**

$$\phi_0(x) = \frac{(x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^3}[2(x_0 - x) + (x_0 - x_1)]$$

$$\phi_1(x) = \frac{(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^3}[2(x_1 - x) + (x_1 - x_0)]$$

$$\psi_0(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^2}$$

$$\psi_1(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^2}$$

■

라그랑지형 Hermite 보간다항식

예를 들어, 모든 자연수 $m_i = 2$ **인 경우, Hermite 보간 조건**

$$H_{2n+1}^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i),\ j = 0,1,\ i = 0,1,\ \cdots,n$$

을 만족하는 $2n+1$ **차 이하의 다항식** $H_{2n+1}(x)$ **을 구하려면,**

우선, 보간조건

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij},\ \phi_i'(x_j) = 0 \ \textbf{for}\ 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le n$$

$$\psi_i(x_j) = 0,\ \psi_i'(x_j) = \delta_{ij} \ \textbf{for}\ 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le n$$

을 만족하는 기저함수들 ϕ_i, ψ_i **을 구하여**

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\phi_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\,\psi_i(x)$$

와 같이 기저함수들의 일차결합으로 구할 수 있다. 그런데 ϕ_i, ψ_i **들은**

$$\phi_i(x) = [1 - 2(x - x_i)\ell_i'(x_i)]\,\ell_i^2(x)$$

$$\psi_i(x) = [x - x_i]\,\ell_i^2(x)$$

($\ell_i(x)$ **는 위에서 정의하였던 랑그랑지 다항식) 와 같이 구할 수 있다고 한다.**

[예제] (라그랑지 형) **(숙제) p228 #3(2)**

$f(x) = \sin x,\ x_0 = 0,\ x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ **인 경우에,**

$$f(x_0) = f'(x_1) = 0,\ f(x_1) = f'(x_0) = 1$$

3차 Hermite 보간 다항식은

$$H_3(x) = \phi_1(x) + \psi_0(x) = \frac{x^2}{(\pi/2)^3}\left[2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\pi}{2}\right] + \frac{x(x-\pi/2)^2}{(\pi/2)^2}$$

이다. 그러므로 $f(\pi/6) = \sin(\pi/6) = 0.5$ **의 근사값은**

$$H_3(\pi/6) = \frac{(7+2\pi)}{27} = 0.49197 \qquad \blacksquare$$

뉴톤형 Hermite 보간다항식

중복이 허락된 마디점 $y_0 \le y_1 \le \ \cdots \ \le y_N$**에 대하여** **뉴톤형 Hermite 보간다항식**

$$H(x) = \sum_{k-0}^{N} a_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - y_i)$$

한남대학교 수학과 김상배교수

의 계수 $a_k(0 \le k \le N)$는 유일하게 결정되는데, a_k를 **확장된 분할차분**이라 하고, 보통의 분할차분처럼

$$a_k = f[y_0, y_1, \cdots, y_k]$$

로 표시한다.

[예제 5.1] (뉴톤형 Hermite 보간다항식)

마디점 x_0, x_0, x_1에서 함수 f의 보간다항식

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_0)$$

이 보간조건

$$p(x_0) = f(x_0),\ p'(x_0) = f'(x_0),\ p(x_1) = f(x_1)$$

을 만족하는 보간다항식이라면 a_0, a_1, a_2는 다음과 같이 주어진다.

$$a_0 \equiv f[x_0] = f(x_0)$$

$$a_1 \equiv f[x_0, x_0] = f'(x_0)$$

$$a_2 \equiv f[x_0, x_0, x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0, x_1] - f'(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \blacksquare$$

[정리 5.6]

만약 $f \in C^m[a,b]$ 이고 구간 $[a,b]$ 위의 마디점 $y_0 \le y_1 \le \cdots \le y_N$ 에서 중복된 점들이 모두 m개 이하이면 함수 f의 분할차분은 다음과 같이 주어진다.

$$f[y_0, y_1, \cdots, y_k] = \begin{cases} \dfrac{f[y_1, y_2, \cdots, y_k] - f[y_0, y_1, \cdots, y_{k-1}]}{y_k - y_0} & y_0 \ne y_k \\ \dfrac{f^{(k)}(y_0)}{k!}, & y_0 = y_k \end{cases}$$

■

[예제5.12] 마디점 $0, \dfrac{\pi}{2}$ 에서 함수값과 도함수값을 이용하여 함수 $f(x) = \sin x$ 의 Hermite 보간다항식 $H_3(x)$ 를 분할차분을 이용하여 구하라.

(풀이)

마디점을 중복하여 $y_0 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = \dfrac{\pi}{2},\ y_3 = \dfrac{\pi}{2}$ 로 놓으면

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f(\frac{\pi}{2}) = 1,\ f'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

이므로

$$f[y_0, y_1] = f[0,0] = f'(0) = 1$$

$$f[y_1, y_2] = f[0, \frac{\pi}{2}] = \frac{1-0}{\pi/2-0} = \frac{2}{\pi}$$

$$f[y_2, y_3] = f[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = f'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$f[y_{0,} y_1, y_2] = \frac{2/\pi - 1}{\pi/2-0} = \frac{4}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}$$

$$f[y_{1,} y_2, y_3] = \frac{0-2/\pi}{\pi/2-0} = -\frac{4}{\pi^2}$$

$$f[y_{0,} y_{1,} y_2, y_3] = \frac{-4/\pi^2 - (4/\pi^2 - 2/\pi)}{\pi/2-0} = \frac{4}{\pi^2} - \frac{16}{\pi^3}$$

이 되어

$$H_3(x) = x + \left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}\right)x^2 + \left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{16}{\pi^3}\right)x^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

y_i	$f[y_i]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$
0	0	1	$4/\pi^2 - 2/\pi$	$4/\pi^2 - 16/\pi^3$
0	0	$2/\pi$	$-4/\pi^2$	
$\pi/2$	1	0		
$\pi/2$	1			

■

[예제5.13] 다음 조건을 만족하는 Hermite 보간다항식을 분할차분표를 이용하여 구하라.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
1	2	3	
2	6	7	8

(풀이)

분할 차분표를 만들자

x	$f(x)$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$	$f[,,,,]$
1	2	$f'(1)=3$	1	2	-1
1	2	$f[x_0,x_1]=4$	3	1	
2	6	$f'(2)=7$	$f''(2)/2!=4$		
2	6	$f'(2)=7$			
2	6				

그러므로 4차 Hermite 보간 다항식은

$$H_4(x)=2+3(x-1)+(x-1)^2+2(x-1)^2(x-2)-(x-1)^2(x-2)^2$$

이다 ■

(숙제) p229 #9 $H_4(x)$ 구하기

다항식은 계산하기 편한 함수이지만 차수가 높아지면 진동이 심하고 진동폭이 매우 크게 되어 오차를 줄이지 못한 경우가 있다. 이러한 단점을 해결하는 방법으로 조각다항식을 사용한다.

조각다항식(스플라인)

전체구간을 소구간으로 나누어 각 소구간에서 정의된 저차다항식들이 마디점에서 매끄럽게 연결되도록 조건을 주어 만든 함수를 **조각다항식(또는 스플라인(spline))** 이라고 한다.

k차 스플라인

구간 $[a,b]$의 마디점 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 에 대하여, 함수 $S(x)$가 두 조건

(1) $S\in C^{(k-1)}[a,b]$

(2) $S(x)$는 각 소구간 $[x_{i-1},x_i]$에서 k차 이하의 다항식

을 만족하면 **k차 스플라인**이라 한다. 즉 이웃하는 소구간의 경계인 마디점에서 양쪽 다항식의 $(k-1)$계 도함수값이 일치하도록 연결한다.

스플라인 보간법

주어진 함수와 마디점에서 함수값이 일치하는 스플라인 함수를 찾아 보간한다.

[예제 5.14] 다음 함수 $S(x)$ **가** 3 **차 스플라인이 되도록** a,b,c,d **를 정하라.**

$$S(x)=\begin{cases} x^3+1 & ,\ x\in[1,2] \\ a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d, & x\in[2,3] \end{cases}$$

(풀이) 각 구간의 함수를

$$S_1(x)=x^3+1$$

$$S_2(x)=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$$

로 정의하면 도함수들이

$$S_1'(x)=3x^2,\ S_1''(x)=6x$$

$$S_2'(x)=3a(x-2)^2+2b(x-2)+c,\ S_2''(x)=6a(x-2)+2b$$

이 된다. 마디점 $x=2$**에** 3**차 스플라인의 조건**

$$S_1(2)=S_2(2)\ ,\ S_1'(2)=S_2'(2)\ ,\ S_1''(2)=S_2''(2)$$

을 적용하면

$$2^3+1=S_1(2)=S_2(2)=d$$
$$3\times 2^2=S_1'(2)=S_2'(2)=c$$
$$6\times 2=S_1''(2)=S_2''(2)=2b$$

을 얻는다. 그러므로 a는 임의의 수, $b=6$, $c=12$, $d=9$이다. ■

k차 스플라인 보간식

마디점 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 에 대하여, k차 스플라인 함수 $S(x)$를 각 소구간 $[x_i,x_{i+1}]$에 제한하여 만든 함수를 $S_i(x)$라 하고 또 $h_i=x_{i+1}-x_i$라 하자. 각 $S_i(x)$는 해당 소구간에서 k차 이하의 다항식이므로 계수는 $(k+1)$개인데, 소구간이 n개가 있으므로, k차 스플라인 함수 $S(x)$는 총 $n(k+1)$개의 미지수를 가지고 있다. 한편, $S(x)$는 $(n-1)$개의 내부 마디점 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$에서 조건 $S\in C^{(k-1)}[a,b]$를 만족하므로, 다음 $k(n-1)$개의 조건

$$S_{i-1}^{(j)}(x_i)=S_i^{(j)}(x_i), 0\le j\le k-1,\ 1\le i\le n-1$$

이 만족되어야 한다. 따라서 총 $n(k+1)-k(n-1)=n+k$개의 조건이 추가되면 $S(x)$는 유일하게 결정된다. 여기에 $k \geq 1$인 경우 $(n+1)$개의 보간 조건

$$S(x_i)=f(x_i),\ 0 \leq i \leq n$$

을 준다면, $(n+k)-(n+1)=(k-1)$개의 추가 조건을 줄 수 있다.

$k=1$일 때는 추가 조건 없이$(k-1=0)$ 1차 스플라인 $S(x)$이 결정 되며, $S(x)$는 전 구간에서 연속이고, 각 소구간 $[x_i, x_{i+1}]$에서 두 점(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})을 지나는 직선은

$$S_i(x)=y_i+(x-x_i)\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$$

로 주어진다. 여기서 $y_i=f(x_i), 0 \leq i \leq n$이다.

$k=2$일 때는 추가 조건 $(k-1=1)$개이므로 구간의 양끝 중 한쪽만 조건을 주게 되어 비대칭적이고, 1차 도함수가 연속이므로 1차 스플라인보다 매끄럽지만, 2차 도함수가 불연속이므로 충분히 매끄럽지는 못하다.

$k=3$ 일 때는 추가 조건 $(k-1=2)$ 개를 추가하면 3차 스플라인 $S(x)$ 이 결정되는데 자연스럽게 매끈하다. 조건 2개 양 끝점에 하나씩 주는데, 아래 두 가지 방법이 주로 쓰인다. 4차 이상 스프라인이라도 장점이 없어, 보통 3차 스플라인이 많이 사용된다.

고정 3차 스플라인

2개의 추가 조건으로 **고정 경계 조건**

$$S'(x_0)=f'(x_0),\ S'(x_n)=f'(x_n)$$

을 준 3차 스플라인이다.

자연 3차 스플라인

2개의 추가 조건으로 **자유 경계 조건**

$$S''(x_0)=0,\ S''(x_n)=0$$

을 준 3차 스플라인이다.

자연 3차 스플라인의 존재성과 유일성

지금부터 $0 \le {}^{\forall} i \le n$ 에 대하여,

$$y_i \equiv f(x_i),\quad z_i \equiv S''(x_i),\ h_i \equiv x_{i+1} - x_i$$

로 놓자. 2계도함수$S''(x)$의 연속성을 사용하면 마디점 x_i에서

$$S''_{i-1}(x_i) = z_i = S''_i(x_i),\ 1 \le {}^{\forall} i \le n-1$$

가 된다. 여기에서 자유경계조건은

$$z_0 = 0,\ z_n = 0 \quad \text{--(1)}$$

으로 쓸 수 있다. 각 소구간 $[x_i, x_{i+1}], 0 \le i \le n-1$에서 스플라인 $S_i(x)$는 3차 다항식이므로 2계 도함수인 $S''_i(x)$은 두 점 $(x_i, z_i), (x_{i+1}, z_{i+1})$을 지나는 직선

$$S''_i(x) = \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - x_i) + \frac{z_i}{h_i}(x_{i+1} - x)$$

로 주어진다. 이것을 두 번 적분하면 원래 함수 $S_i(x), 0 \le {}^{\forall} i \le n-1$를 얻는다.

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x_{i+1} - x)^3 + c_i(x - x_i) + d_i(x_{i+1} - x) \quad \text{-- (2)}$$

여기에서 $a_i = z_{i+1}/(6h_i), b_i = z_i/(6h_i)$ **이다.** c_i**와** d_i**를 정하기 위하여**

함수 $S(x)$**의 연속성과 보간조건**

$$\begin{cases} S_i(x_i) = y_i \\ S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{cases}, \quad 0 \le \forall i \le n-1$$

을 사용하여 방정식 (2)를 풀면

$$c_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_{i+1}$$

$$d_i = \frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_i$$

와 같이 c_i**와** d_i**를 구할 수 있다. (2)에서 도함수** $S'(x)$**의 연속성**

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), \quad 1 \le \forall i \le n-1$$

을 부과하면 $(n-1)$**개의 미지수** $z_1, z_2, \cdots \cdots z_{n-1}$**를 갖는 연립일차방정식**

$$h_{i-1} z_{i-1} + u_i z_i + h_i z_{i+1} = \beta_i, \quad 1 \le \forall i \le n-1 \quad \textbf{--(3)}$$

을 얻는다. 여기서 $u_i = 2(h_{i-1} + h_i),\ \beta_i = \omega_i - \omega_{i-1},\ \omega_i = 6(y_{i+1} - y_i)/h_i$ **이다.**

한남대학교 수학과 김상배교수

위 식을 행렬 형태로 쓰면

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_1 & u_2 & h_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & u_3 & h_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

와 같이 z_i 들에 대한 연립일차방정식이 된다. 여기에서 h_i 는 양수이므로

$$|u_i| = 2(h_{i-1} + h_i) > \begin{cases} |h_1|, & i = 1 \\ |h_{1-1}| + |h_i|, & 2 \le i \le n-2 \\ |h_{n-2}|, & i = n-1 \end{cases}$$

이 성립한다. 그러므로 행렬의 대각성분의 절대값이 그 행의 나머지 성분들의 절대값의 합보다 크므로 강대각지배행렬이다. 강대각지배행렬은 정칙행렬임이 증명되어 있다. 그러므로 위 행렬 방정식은 유일한 해를 가진다. 따라서 자연 3차스플라인은 오직 하나만 존재한다고 결론지을 수 있다. ■

[예제5.15] 함수 $f(x)=((x/2+\sin x)\sin x+8)/2$ **를 마디점**

$$x_k = kh,\ 0 \le k \le 10,\ h = 4\pi/10$$

에서 보간하는 자연 3**차스프라인 그래프를 그려 보아라. (컴퓨터 숙제)** ■

주어진 함수를 보간하는 함수들 중에서 자연 3**차스플라인이 가장 매끄럽다.**
그 이유는 다음 정리에서 알 수 있다.

[정리5.7] 마디점 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ **에서 함수** $f\in C^2[a,b]$ **를 보간하는 임의의 함수** $g\in C^2[a,b]$ **에 대하여**

$$\int_a^b S''(x)^2dx \le \int_a^b g''(x)^2dx$$

이 성립한다. 여기서 $S(x)$ **는 마디점에서** f **를 보간하는 자연** 3**차 스플라인이다.**

(증명)

만약 $u(x) \overset{\text{정의}}{=} g(x) - S(x)$ **로 놓으면,** $g(x) = S(x) + u(x)$ **로부터**

$$g''(x)^2 = [S''(x) + u''(x)]^2$$

$$g''(x)^2 = S''(x)^2 + 2u''(x)S''(x) + u''(x)^2$$

$$\int_a^b g''(x)^2 dx = \int_a^b S''(x)^2 dx + \int_a^b u''(x)^2 dx + 2\int_a^b S''(x)\, u''(x)\, dx \quad \text{--(1)}$$

각 소구간 $[x_i, x_{i+1}]$ **에서** $S(x)$ **는** 3 **차 다항식이므로** $S'''(x)$ **는 상수**(예를들어, c_i) **이다. 자연 스플라인 조건** $S''(a) = 0,\ S''(b) = 0$ **을 이용하여,**

$$\begin{aligned}
\int_a^b S''(x)\, u''(x)\, dx &= [S''(x)\, u'(x)]_a^b - \int_a^b S'''(x)\, u'(x) dx \\
&= [0 - 0] - \int_a^b c_i\, u'(x)\, dx \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} c_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)\, dx \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} c_i\, [u(x_{i+1}) - u(x_i)] = 0
\end{aligned}$$

그러므로 (1)에서

$$\int_a^b g''(x)^2 dx = \int_a^b S''(x)^2 dx + \int_a^b u''(x)^2 dx$$

따라서

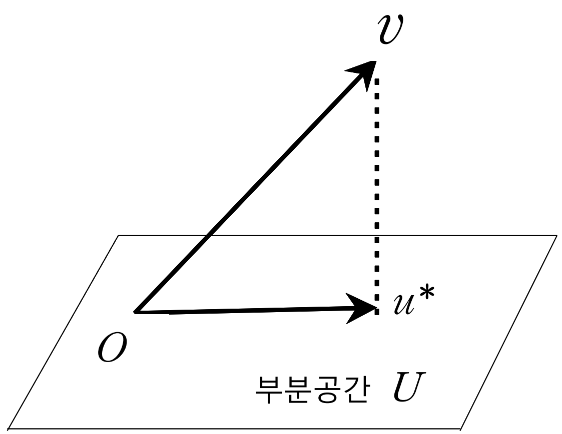
$$\int_a^b S''(x)^2 dx \le \int_a^b g''(x)^2 dx \qquad \blacksquare$$

(주의) 곡선 $y = f(x)$ **의 곡률은**

$$\frac{|f''(x)|}{[1+f'(x)^2]^{3/2}}$$

이므로 자연 3 **차 스플라인은 다른 어떤 곡선보다 진동이 심하지 않다는 사실을 보여준다.**

보간법은 주어진 마디점에서 함수값(또는 고계도함수)을 만족하는 쉬운함수(다항식)을 찾는 문제이지만, 함수를 근사하는 다른 방법으로 최적근사문제가 있다.



최적근사문제

벡터(함수) 공간 V안의 벡터 v와 부분공간 U에 대하여,

$$\|v-u^*\| \le \|v-u\|, \ ^{\forall}u \in U$$

을 만족하는 **최적근사벡터** $u^* \in U$을 찾아라.

주목 부분공간 U가 유한차원일 때는 u^*가 항상 존재한다. 일반적으로 u^*를 찾는 일은 어렵지만, 내적이 정의된 벡터공간에서는 최적근사문제가 선형연립방정식의 근을 구하는 문제로 귀착된다. 부분공간의 기저를 잘 선택하면 선형연립방정식의 계수행렬이 근을 쉽게 구할 수 있는 특별한 형태로 만들 수 있다.

최소제곱 근사문제(연속형 함수문제)

내적공간인 함수공간 $C[a,b]$ 에서 내적과 노름이

$$\text{내적 : } < f,g >= \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

$$\text{노름 : } \|f\| =< f,f >^{1/2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

로 주어질 때, f 와 부분공간 U에 대하여,

$$\|f - g^*\| \le \|f - g\|, \ {}^{\forall} g \in U$$

을 만족하는 $g^* \in U$을 찾아라. 여기에서 g^* 를 최소제곱 근사함수라고 한다.

벡터의 직교

두 벡터 u,v는 직교한다. $\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $< u,v >= 0$

(예) 함수 x, x^2 는 공간 $C[-1,1]$ 에서 직교한다.

왜냐하면 $< x,x^2 > \ = \int_{-1}^{1} (x)\,(x^2)\,dx = 0$ **이기 때문이다.**

직교집합

벡터들의 집합 $< u_1, u_2, \cdots, u_n >$ **는 직교집합이다.**

$$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow} \quad < u_i, v_j > = 0 \ , \ {}^{\forall} i \neq {}^{\forall} j$$

정규직교집합

벡터들의 집합 $< u_1, u_2, \cdots, u_n >$ **는 정규직교집합이다.**

$$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow} \quad < u_i, v_j > = \delta_{ij} \ , \ {}^{\forall} i, {}^{\forall} j$$

벡터와 집합의 수직

벡터 v**와 집합** W**은 직교한다.** **(** $v \perp W$ **)**

$$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow} \quad < v, w > = 0, \ {}^{\forall} w \in W$$

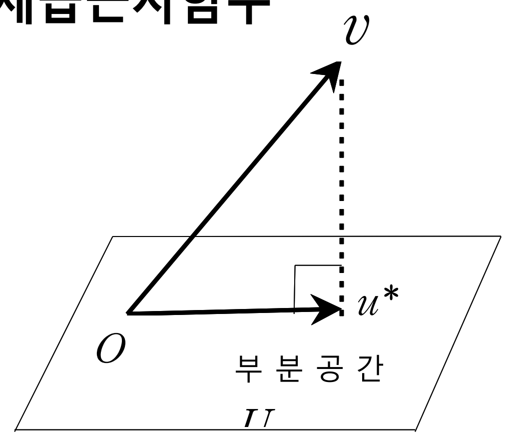
[정리5.9] (연속형,이산형 공통)

U가 내적공간 V의 부분공간이고 $v \in V$일 때,

$$(\ u^* \in U \text{가 } v \text{의 최소제곱근사함수}\ ) \Leftrightarrow v - u^* \perp U$$

($\Longrightarrow$)

임의의 $u \in U$ 에 대하여, $u^* + u \in U$ 이므로, u^* 가 v의 최소제곱근사함수 이면,



$$\|v - u^*\|^2 \le \|v - (u^* + u)\|^2 \quad \text{--(1)}$$

이 성립한다. 여기에서

$$\begin{aligned} \|v - (u^* + u)\|^2 &= \|(v - u^*) - u\|^2 \\ &= \ < (v - u^*) - u,\ (v - u^*) - u > \\ &= \|v - u^*\|^2 - 2 < v - u^*, u > + \|u\|^2 \quad \text{--(2)} \end{aligned}$$

이므로 by (1),(2),

$$2 < v - u^*, u > \le \|u\|^2$$

한남대학교 수학과 김상배교수

를 얻는다. 임의의 실수 r에 대하여 $ru \in U$이므로, u대신 ru를 대입하면,

$$2r < v-u^*, u> \le r^2\|u\|^2$$

$$2 < v-u^*, u> \le r\|u\|^2$$

이다. 여기에서 $r \to 0$ 이면 $< v-u^*, u> = 0$, 즉 $v-u^* \perp U$ 이다.

($\Leftarrow$)

임의의 $u \in U$ 에 대하여, $u-u^* \in U$이므로,

$$v-u^* \perp u-u^*$$

$$< v-u^*, u-u^* > = 0$$

이므로

$$\begin{aligned} \|v-u\|^2 &= \|(v-u^*)-(u-u^*)\|^2 \\ &= \|v-u^*\|^2 - 2 < v-u^*, u-u^* > + \|u-u^*\|^2 \\ &= \|v-u^*\|^2 + \|u-u^*\|^2 \\ &\ge \|v-u^*\|^2 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

정규방정식(연속형)

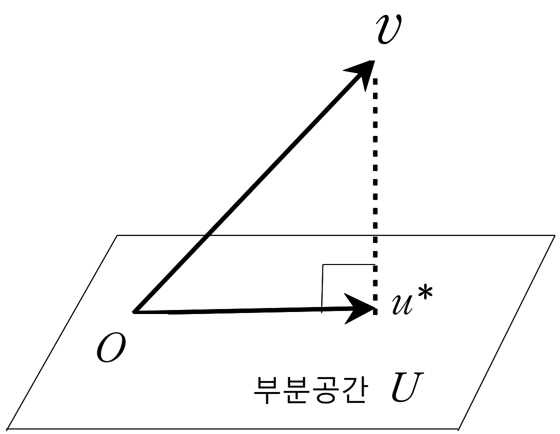
U가 내적공간 V의 부분공간이고 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$를 기저로 갖는 경우, 어떤 $v \in V$ 의 U안에 있는 최적 근사함수 $u^* \in U$를

$$u^* = \Sigma_{j=1}^{n} a_j u_j$$

로 놓자. 그러면 미지수 a_j들을 구하기 위하여 [정리5.9]의 결과를 이용하자.

$$v - u^* \perp U \iff < v - u^*, u_i > = 0, \ {}^\forall i = 1, 2, \cdots, n$$

여기에서 ${}^\forall i = 1, 2, \cdots, n$에 대하여



$$< v - u^*, u_i > = 0$$

$$\iff < u^*, u_i > = < v, u_i >$$

$$\iff < \Sigma_{j=1}^{n} a_j u_j, u_i > = < v, u_i >$$

$$\iff \Sigma_{j=1}^{n} a_j < u_j, u_i > = < v, u_i >$$

$$\iff \Sigma_{j=1}^{n} < u_i, u_j > a_j = < v, u_i >$$ 이다.

한남대학교 수학과 김상배교수

a_j 들에 관한 선형연립방정식

$$\Sigma_{j=1}^{n} < u_i, u_j > a_j = < v, u_i >, \ i = 1, 2, \cdots, n$$

은

$$Aa = b$$

로 놓을 수 있는데, 이것을 정규방정식(연속형)이라고 한다. 단

$$A = [< u_i, u_j >]_{n \times n}$$
$$a = [a_j]_{n \times 1}$$
$$b = [< v, u_j >]_{n \times 1}$$

이다. 행렬 A 는 대칭이고 정칙임을 보일 수 있다. 따라서 정규방정식은 유일한 해를 갖는다. 따라서 근사함수 u^* 를 유일하게 결정할 수 있다.

[정리 5.10] U 가 내적공간 V 의 부분공간이고 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 를 정규직교기저로 갖는 경우, 어떤 $v \in V$ 의 U 안에 있는 최적 근사함수 $u^* \in U$ 는

$$u^* = \Sigma_{i=1}^{n} < v, u_i > u_i$$

와 같이 얻을 수 있다.

(증명)

$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$**들 정규직교기저이면** $< u_i, u_j > = \delta_{ij}$ **이므로**

$$A = [< u_i, u_j >]_{n \times n} = I_{n \times n}$$

가 되므로 정규방정식은 $Aa = b$**의 해** $a = [a_j]$ **는** $a = b$**로 주어진다.** ■

[예제 5.17] 구간 $[-1, 1]$**에 정의된 함수** $f(x) = \sin x$ **의 3차다항함수들의 공간** Π_3 **내의 최소제곱함수** $p \in \Pi_3$ **을 구하여라. 내적은**

$$< f, g > = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$$

을 사용하라.

(풀이 1)

$B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$**를** Π_3 **의 기저로 사용하면** p**를**

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = \Sigma_{i=0}^{3} c_i x^i$$

와 같이 표시할 수 있다. p**가** f**에 가장 가까우면,** $(p - f) \perp \Pi_3$ **이다. 즉**

$\forall i = 0,1,2,3,$
$$< p - f, x^i > = 0$$
$$< \Sigma_{j=0}^{3} c_j x^j - f,\ x^i > = 0$$
$$\Sigma_{j=0}^{3} < x^j, x^i > c_j = < f,\ x^i >$$

그러므로 정규방정식은

$$\Sigma_{j=0}^{3} \ < x^j,\ x^i > c_j = < \sin x\,, x^i >,\ i = 0,1,2,,3$$

이다. 각 내적들을 계산하여 연립선형방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2(\sin 1 - \cos 1) \\ 0 \\ -6\sin 1 + 10\cos 1 \end{bmatrix}$$

이 방정식을 풀면 $p(x)$**의 계수들**

$$c_0 = 0,\ c_1 = 195/2\sin 1 - 150\cos 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = -315/2\sin 1 + 245\cos 1$$

로 구하여 근사해 $p(x)$**를 얻는다.**

$$p(x) = (195/2\sin 1 - 150\cos 1)x + (-315/2\sin 1 + 245\cos 1)x^3 \qquad \blacksquare$$

(풀이 2) 정규직교기저

$$B_2 = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$$
$$= \{1/\sqrt{2},\ \sqrt{3/2}\,x,\ \sqrt{45/8}\,(x^2 - 1/3),\ \sqrt{175/8}\,(x^3 - 3/5\,x)\}$$

를 Π_3 **의 기저로 사용하면 [정리5.10] 에 따라** $p(x)$**는**

$$p(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + b_2 p_2(x) + b_3 p_3(x)$$
$$b_i = < \sin x,\ p_i(x) >, i = 0,1,2,3$$

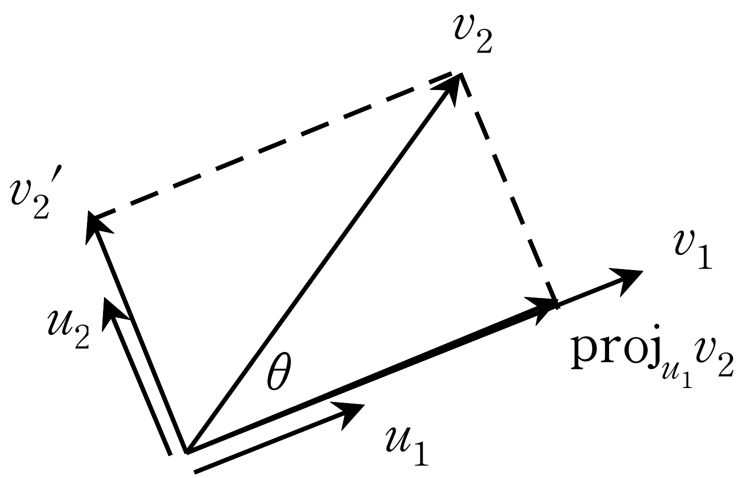
로 주어진다. b_i **들을 계산하면 다음과 같다.**

$$b_0 = 0,\ b_1 = \sqrt{6}\,(\sin 1 - \cos 1),$$
$$b_2 = 0,\ b_3 = \sqrt{14}\,(-9\sin 1 + 14\cos 1)$$

그리하여 근사함수 $p(x)$ **는 다음과 같이 주어진다.**

$$p(x) = \sqrt{6}\,(\sin 1 - \cos 1)\sqrt{3/2}\,x$$
$$+ \sqrt{14}\,(-9\sin 1 + 14\cos 1)\sqrt{175/8}\,(x^3 - 3/5\,x) \qquad \blacksquare$$

정규직교기저(그램-슈미트 과정)



$$\mathrm{proj}_{u_1} v_2 = (\|v_2\| \cos\theta)\, u_1 = (\|v_2\|\,\|u_1\| \cos\theta)\, u_1 = \langle v_2, u_1 \rangle\, u_1$$

$$v_1{}' = v_1,\quad u_1 = \frac{v_1{}'}{\|v_1{}'\|}$$

$$v_2{}' = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle\, u_1,\quad u_2 = \frac{v_2{}'}{\|v_2{}'\|}$$

$$v_3{}' = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle\, u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle\, u_2,\quad u_3 = \frac{v_3{}'}{\|v_3{}'\|}$$

. . . .

[예제5.18] 기저 $B_1 = \{1, x, x^2\}$ 를 정규직교화 하라.

(풀이)

$v_1{}' = v_1 = 1$

$\|v_1{}'\| = \left(\int_{-1}^{1}(1)(1)dx\right)^{1/2} = \sqrt{2}$, $u_1 = \dfrac{v_1{}'}{\|v_1{}'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$v_2{}' = v_2 - < v_2, u_1 > u_1 = x - \left(\int_{-1}^{1} x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)dx\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = x$

$\|v_2{}'\| = \left(\int_{-1}^{1} x\,x\,dx\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $u_2 = \dfrac{v_2{}'}{\|v_2\|} = \dfrac{x}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,x$

$v_3{}' = v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2$

$= x^2 - \left(\int_{-1}^{1} x^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)dx\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\int_{-1}^{1} x^2\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,x\right)dx\right)\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,x\right) = x^2 - \dfrac{1}{3}$

$\|v_3{}'\| = \left(\int_{-1}^{1}(x^2 - \dfrac{1}{3})^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{8}{45}}$, $u_3 = \dfrac{v_3{}'}{\|v_{3\|}} = \dfrac{(x^2 - 1/3)}{\sqrt{8/45}} = \sqrt{\dfrac{45}{8}}\,(x^2 - \dfrac{1}{3})$ ■

한남대학교 수학과 김상배교수

자료맞추기 (예:이산형 최소제곱법)

함수 $f(x)$를 모르고 관측을 통하여 얻은 $f(x_i)$들의 근사값 $y_i(1 \le i \le m)$만 주어졌을 때 적당한 의미에서 x와 y의 관계를 가장 잘 나타내는 근사함수 $g(x)$를 찾아내는 것을 자료맞추기라고 한다.

이 경우 함수 $g(x)$는 자료 $\{(x_i, y_i) \mid 1 \le i \le m\}$를 정확히 만족하지 않고, $g(x)$의 유형은 관측이나 경험에 의한 직관에 의하여 주어진다. 보간법에서는 변수들의 개수와 자료(또는 조건)들의 개수가 동일한 것에 비하여, 자료맞추기에서는 $g(x)$를 결정하기 위하여 찾는 변수들의 개수보다 자료의 개수가 일반적으로 훨씬 많다. 즉 자료맞추기 문제는 과정보체계이다.

이산형 최소제곱 문제

어떤 자료 $\{(x_i, y_i) \mid 1 \le i \le m\}$와 일차독립인 어떤 함수들 $\{\phi_j \mid 1 \le j \le n\}$이 주어졌을 때 $(m \ge n)$, $^{\forall} g(x) = z_1\phi_1(x) + \cdots + z_n\phi_n(x)$에 대하여

$$\Sigma_{i=1}^{m} |g^*(x_i) - y_i|^2 \le \Sigma_{i=1}^{m} |g(x_i) - y_i|^2$$

을 만족하는 함수 $g^*(x) = z_1{}^* \phi_1(x) + \cdots + z_n{}^* \phi_n(x)$를 구하는 것을 (**이산형**) **최소제곱 문제**라 하고, 함수 $g^*(x)$를 (**이산형**) **최소제곱 함수**라고 한다.

이 문제는 오차(error)함수

$$E(z) \overset{\text{정의}}{=} \Sigma_{i=1}^{m} [z_1\phi_1(x_i) + \cdots + z_n\phi_n(x_i) - y_i]^2$$

의 최소값을 구하는 문제로 볼 수 있고, $E(z)$의 최소값을 구하기 위하여는 미분이 0이 되는 사실을 이용한다. 즉 $\nabla E(z) = 0$ 을 다시 쓰면

$$\frac{\partial E}{\partial z_k} = 0, \quad 1 \le {}^\forall k \le n$$

이다. 그러므로 $1 \le {}^\forall k \le n$ 에 대하여,

$$\Sigma_{i=1}^{m} 2[z_1\phi_1(x_i) + \cdots + z_n\phi_n(x_i) - y_i]\,\phi_k(x_i) = \frac{\partial E}{\partial z_k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Sigma_{i=1}^{m} \left[\Sigma_{j=1}^{n} \phi_j(x_i)\ z_j - y_i\right] \phi_k(x_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Sigma_{i=1}^{m} \phi_k(x_i) \left[\Sigma_{j=1}^{n} \phi_j(x_i)\ z_j\right] = \Sigma_{i=1}^{m} \phi_k(x_i)\, y_i$$

여기서 $a_{ij} = \phi_j(x_i)$ 로 놓고, 위 방정식을 다시 쓰면

$$\Sigma_{i=1}^{m} a_{ik} [\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} z_j] = \Sigma_{i=1}^{m} a_{ik} y_i \ , \ 1 \le {}^{\forall} k \le n$$

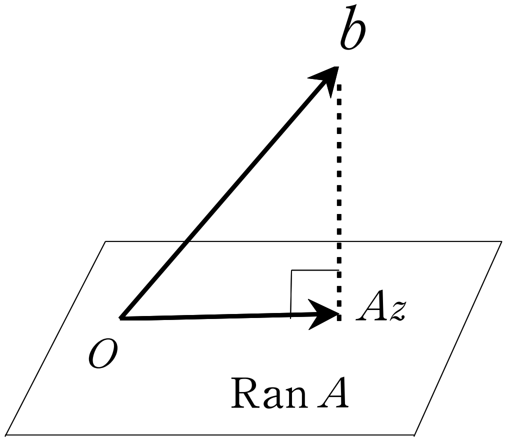
이 되고, 이 선형방정식을 **정규방정식(이산형)** 이라 한다.

$$A^T A z = A^T b \quad \text{--(1)}$$

여기서

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad b = [y_i]_{m \times 1}$$

이산 최소제곱 문제 (벡터적 접근)



일차독립인 어떤 함수들 $\{\phi_i \mid 1 \le i \le n\}$ 이 주어졌을 때, 함수

$$g(x) = z_1 \phi_1(x) + \cdots + z_n \phi_n(x)$$

가 만약 자료 $\{(x_i, y_i) \mid 1 \le i \le m\}$ 들을 모두 만족한다면,

$$z_1 \phi_1(x_i) + \cdots + z_n \phi_n(x_i) = y_i, \ 1 \le {}^{\forall} i \le m$$

이 성립해야 하고, 이것은 선형연립방정식

$$Az = b$$
$$A = [a_{ij}]_{m \times n}\ ,\ \ a_{ij} = \phi_j(x_i)$$
$$b = [y_i]_{m \times 1}$$

로 표시할 수 있다. $m \geq n$ **이면 일반적으로는 해가 존재하지 않는다, 즉,**

$$b \notin \mathrm{Ran}\, A$$

이다. $\mathrm{Ran}\, A$ **에서** b **에 가장 가까운 벡터** Az **를 찾으면, by [정리5.9] , 그것은**

$$(b - Az) \perp \mathrm{Ran}\, A$$

일 때 성립한다. 즉 $(b - Az)$ **가** A **의 모든 열벡터와 수직이다. 즉,**

$$A_1^T(b - Az) = 0,\ A_2^T(b - Az) = 0, \cdots,\ A_n^T(b - Az) = 0$$

그러므로

$$A^T(b - Az) = 0$$

이 성립하고 이것은

$$A^TAz = A^Tb$$

라고 하는 정규방정식이 된다.

[예제 5.22] 다음 표의 최소제곱 일차식 $p(x) = z_1 + z_2 x$ 을 구하라.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-0.17	1.42	1.56	2.74	4.45	4.59	6.12	6.62	8.30	9.31

(풀이)

위 점들을 지나는 가장 적합한 1차식 $p(x) = z_1 + z_2 x$ **을 구하려면 오차(error) 함수**

$$E(z_1, z_2) = \Sigma_{i=1}^{10} [z_1 + z_2 x_i - y_i]^2$$

을 최소화하는 z_1, z_2 **를 구해야 한다. 그러므로**

$$\frac{\partial E}{\partial z_1} = 0, \frac{\partial E}{\partial z_2} = 0$$

이 되는 z_1, z_2 **를 구하자.**

$$\Sigma_{i=1}^{10} 2[z_1 + z_2 x_i - y_i] = \frac{\partial E}{\partial z_1} = 0$$

$$\Sigma_{i=1}^{10} 2x_i [z_1 + z_2 x_i - y_i] = \frac{\partial E}{\partial z_2} = 0$$

$$\begin{cases} \Sigma_{i=1}^{10}[z_1 + z_2 x_i - y_i] = 0 \\ \Sigma_{i=1}^{10} x[z_1 + z_2 x_i - y_i] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma_{i=1}^{10}[\quad z_1 + x_i \ z_2] = \Sigma_{i=1}^{10} \ y_i \\ \Sigma_{i=1}^{10}[x_i z_1 + x_i^2 z_2] = \Sigma_{i=1}^{10} x_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^{10} 1 & \Sigma_{i=1}^{10} x_i \\ \Sigma_{i=1}^{10} x_i & \Sigma_{i=1}^{10} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^{10} \ y_i \\ \Sigma_{i=1}^{10} x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix}$$

$$A^T A z = A^T y$$

여기에서

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{10} \end{bmatrix}, \ y^T = [y_1, y_2, \cdots, y_{10}]$$

한편, 벡터적 접근으로 한다면 1차식 $p(x) = z_1 + z_2 x$ **이 마디점들** $(x_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, 10$ **을 만족한다면,**

$$z_1 + z_2 x_i = y_i,\ i = 1, 2, \cdots, 10$$

이어야 한다. 이것을 행렬 형태로 쓰면

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix}$$

$$Az = y$$

이 된다. 이것은 해가 존재하지 않지만, 정규방정식 $A^T A z = A^T y$ **은 근사해를 제공한다. 정규방정식의 좌변 행렬은**

$$A^T A = \begin{bmatrix} 10 & \Sigma_{i=1}^{10} x_i \\ \Sigma_{i=1}^{10} x_i & \Sigma_{i=1}^{10} x_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 55 \\ 55 & 385 \end{bmatrix}$$

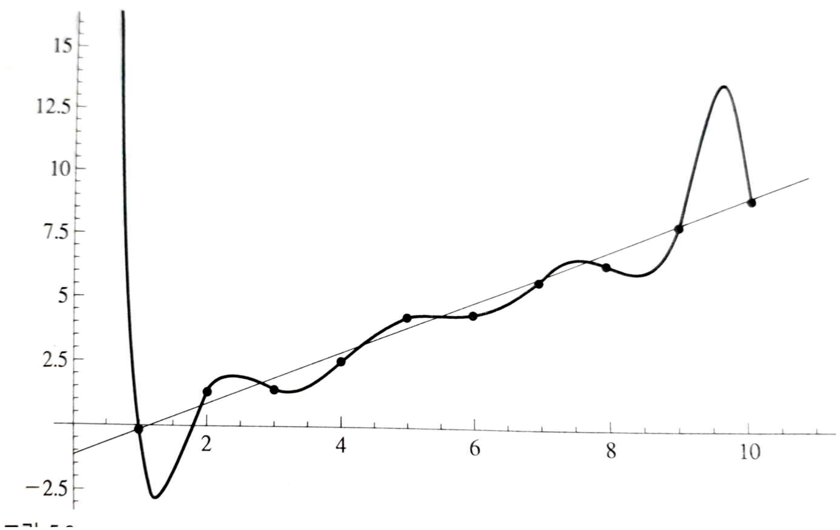
이고 우변 상수벡터는

$$A^T y = \begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^{10} a_{i1} y_i \\ \Sigma_{i=1}^{10} a_{i2} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^{10} 1 \times y_i \\ \Sigma_{i=1}^{10} x_i y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44.94 \\ 331.7 \end{bmatrix}$$

이다. 정규방정식 $A^T A z = A^T y$ 를 풀면

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1.14133 \\ 1.02461 \end{bmatrix}$$

최소제곱 일차식은 $F(x) = -1.14133 + 1.02461x$ 이다. ■



한남대학교 수학과 김상배교수

[예제 5.23] 다음 데이터의 최소제곱근사식을

$$p(x) = z_1 e^x + z_2 \ln x + z_3 \sin x$$

로 구하여라.

x_i	0.24	0.61	0.96	1.32	1.71	2.04	2.39	2.80	3.01	3.38
y_i	1.48	-0.04	-0.51	-1.14	-1.72	-1.71	-1.64	-1.03	-0.65	0.63

(풀이)

기저함수들을 $\phi_1(x) = e^x$, $\phi_2(x) = \ln x$, $\phi_3(x) = \sin x$ 로 놓으면

$$p(x) = z_1 \phi_1(x) + z_2 \phi_2(x) + z_3 \phi_3(x)$$

이 되고, $y = p(x)$ 가 위 점들을 만족한다면

$$z_1\phi_1(x_i) + z_2\phi_2(x_i) + z_3\phi_3(x_i) = y_i,\ \ i = 1, 2, \cdots, 10$$

이어야 한다. 이것을 행렬 형태로 쓰면

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \phi_3(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \phi_3(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1(x_{10}) & \phi_2(x_{10}) & \phi_3(x_{10}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{x_1} & \ln x_1 & \sin x_1 \\ e^{x_2} & \ln x_2 & \sin x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{x_{10}} & \ln x_{10} & \sin x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix}$$

$$Az = y$$

이 된다. 이것은 해가 존재하지 않지만, 정규방정식 $A^TAz = A^Ty$ **은 근사해를 제공한다. 정규방정식의 좌변 행렬은**

$$A^TA = \begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^{10}(e^{x_i})^2 & \Sigma_{i=1}^{10} e^{x_i}\ln x_i & \Sigma_{i=1}^{10} e^{x_i}\sin x_i \\ \Sigma_{i=1}^{10}(\ln x_i)e^{x_i} & \Sigma_{i=1}^{10}(\ln x_i)^2 & \Sigma_{i=1}^{10}\ln x_i \sin x_i \\ \Sigma_{i=1}^{10}(\sin x_i)e^{x_i} & \Sigma_{i=1}^{10}(\sin x_i)\ln x_i & \Sigma_{i=1}^{10}(\sin x_i)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1779.3 & 91.224 & 28.1437 \\ 91.224 & 7.67262 & 1.57713 \\ 28.1437 & 1.57713 & 4.42187 \end{bmatrix}$$

우변 상수벡터는

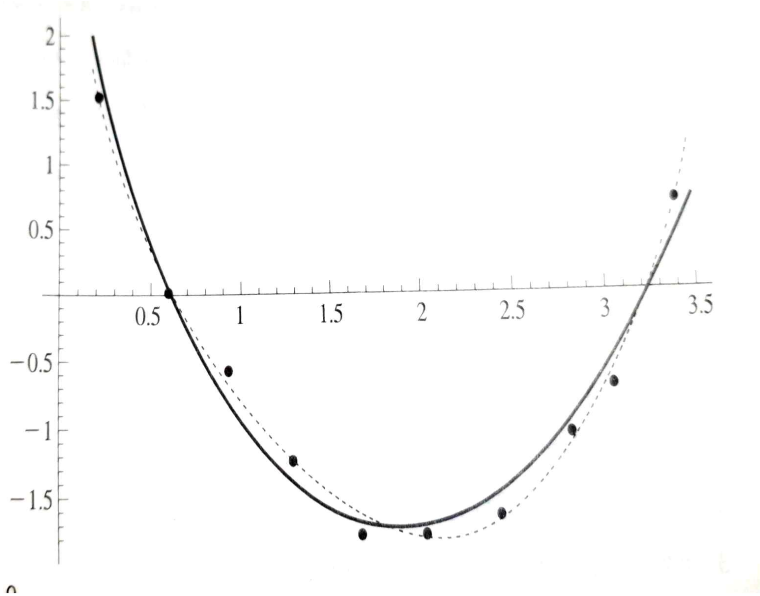
$$A^Ty = \begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^{10} a_{i1} y_i \\ \Sigma_{i=1}^{10} a_{i2} y_i \\ \Sigma_{i=1}^{10} a_{i3} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55.6917 \\ -6.96838 \\ -1.27225 \end{bmatrix}$$

로 주어진다. 정규방정식 $A^TAz = A^Ty$ **를 풀어** z **를 구하면**

$$z^T = [0.0558935,\ -1.31225,\ -1.27225]$$

이므로 최소제곱근사 함수(점선 그래프) 는 다음과 같다.

$$g(x) = 0.056\, e^{x} - (1.3)\ln x - (1.3)\sin x \qquad \blacksquare$$



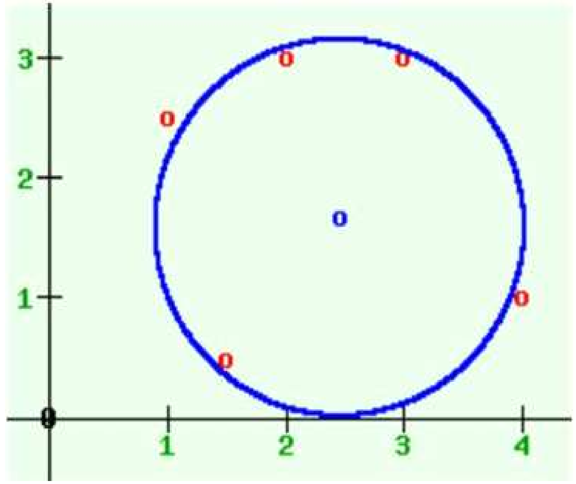
(참고로 실선 그래프는 최소제곱 5차다항함수)

[특별 예제] 다음 데이터에 대한 최적함수 $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$**을 구하라.**

x_i	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
y_i	2.5	0.5	3.0	3.0	1.0

(풀이)

최적의 c_1, c_2, r 을 구하기 위하여 원의 방정식을 다음과 같이 선형방정식으로 변형한다.



$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$$

$$2xc_1+2yc_2+r^2-c_1^2-c_2^2=x^2+y^2$$

여기서 $c_3=r^2-c_1^2-c_2^2$ 로 놓으면, c_1, c_2, c_3 에 대하여 선형인 방정식

$$(2x)c_1+(2y)c_2+(1)\,c_3=(x^2+y^2)$$

을 얻는다. 이 방정식이 표에서 주어진 점들을 만족하다면 다음 선형방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.25 \\ 2.5 \\ 13.0 \\ 18.0 \\ 17.0 \end{bmatrix}$$

위 방정식에 대응하는 정규방정식

$$\begin{bmatrix} 129 & 89 & 23 \\ 89 & 102 & 20 \\ 23 & 20 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 318.00 \\ 258.75 \\ 57.75 \end{bmatrix}$$

을 풀면 계수 c_1, c_2, c_3 을 구하고

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.46 \\ 1.60 \\ -6.17 \end{bmatrix}$$

최적의 원의 방정식은

$$(x-2.46)^2 + (y-1.6)^2 = c_1^2 + c_2^2 - c_3 = 2.46^2 + 1.6^2 - 6.17$$

$$(x-2.46)^2 + (y-1.6)^2 = (1.56)^2 \qquad \blacksquare$$

제6장 수치미분과 수치적분

수치미분식

수치미분은 미분방정식을 수치적으로 푸는데 중요한 역할을 한다. 함수 $f(x)$의 1계도함수에 대한 수치미분은

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

로써 $f'(x)$의 근사값을 구할 수 있다. $h>0$일 때 **전향수치미분식**(forward difference formula), $h<0$일 때 **후향수치미분식**(backward difference formula)라고 한다.

수치미분식의 오차

테일러의 정리를 사용하면

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(\zeta), \quad {}^{\exists}\zeta \in (x, x+h)$$

을 얻고 이것을 정리하면

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{2} h f''(\zeta), \quad \exists\, \zeta \in (x, x+h)$$

여기에서 $-h f''(\zeta)$ 를 **절단오차**(truncation error)라 하고,

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

로 표시한다. $O(h)$ 는 h 와 0 으로 가는 속도가 같다는 의미이다.

중앙수치미분식

절단오차가 더 정확한 $O(h^2)$ 인 수치미분 공식을 유도해 보자. 테일러 급수로부터

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(x) + \frac{1}{3!} h^3 f^{(3)}(x) + \frac{1}{4!} h^4 f^{(4)}(x) + \cdots$$

$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(x) - \frac{1}{3!} h^3 f^{(3)}(x) + \frac{1}{4!} h^4 f^{(4)}(x) + \cdots$$

를 얻고, 첫식에서 두 번째 식을 빼면, 홀수항만 남아,

$$f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)+\frac{2}{3!}h^3f^{(3)}(x)+\frac{2}{5!}h^5f^{(5)}(x)+\cdots$$

을 얻는다. 여기에서 $f'(x)$에 대하여 풀면

$$f'(x) = \frac{(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x) - \frac{h^4}{5!}f^{(5)}(x) - \cdots \qquad \text{---(1)}$$

$$= \frac{(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

이 된다. 그리하여 $f'(x)$의 근사값을 구하는 **중앙수치미분식**(central difference formula)

$$f'(x) \approx \frac{(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

을 얻는다.

Richardson이 외삽법

절단오차가 더 정확한 $O(h^4)$인 수치미분 공식을 유도해 보자. 식(1)로부터

$$f'(x) = \frac{(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x) - \frac{h^4}{5!}f^{(5)}(x) - \cdots$$

$$= \frac{(x+h)-f(x-h)}{2h} + a_2h^2 + a_4h^4 + \cdots \qquad \text{---(2)}$$

이다. 여기서 f와 x가 고정되었다고 가정하고, h에 대한 함수

$$\phi(h) \overset{\text{정의}}{=} \frac{(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

를 정의하자. 식 (2)로부터

$$\phi(h) = f'(x) - a_2h^2 - a_4h^4 - \cdots$$

$$\phi\left(\frac{h}{2}\right) = f'(x) - a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 - a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 - \cdots$$

을 얻는다. h^2 항을 소거하기 위하여 $\phi(h)-4\phi\left(\frac{h}{2}\right)$를 계산하면

$$\phi(h)-4\phi\left(\frac{h}{2}\right)= -3f'(x)-\frac{3}{4}a_4h^4- \cdots$$

이 된다. 여기에서 $f'(x)$에 대하여 풀면

$$\begin{aligned} f'(x) &=-\frac{1}{3}\phi(h)+\frac{4}{3}\phi\left(\frac{h}{2}\right)+\frac{3}{4}a_4h^4+ \cdots \\ &=-\frac{1}{3}\phi(h)+\frac{4}{3}\phi\left(\frac{h}{2}\right)+O(h^4) \end{aligned}$$

을 얻는다.

2계도함수의 수치미분식

테일러 급수로부터 얻은 두 식

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\frac{1}{3!}h^3f^{(3)}(x)+\frac{1}{4!}h^4f^{(4)}(x)+\cdots$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)-\frac{1}{3!}h^3f^{(3)}(x)+\frac{1}{4!}h^4f^{(4)}(x)+\cdots$$

의 양변을 더하면,

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+2\frac{1}{2!}h^2f''(x)+2\frac{1}{4!}h^4f^{(4)}(x)+\cdots$$

을 얻고, $f''(x)$ **관하여 풀면,**

$$f''(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}-\frac{2}{4!}h^2f^{(4)}(x)-\cdots$$

$$=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}+O(h^2)$$

을 얻는다. 그리하여 오차 $O(h^2)$를 갖는 2계 도함수 $f''(x)$의 근사값을 구하는 **중앙수치미분식**(central difference formula)

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

을 얻는다.

(숙제) p297#3 (1),(2)

수치적분의 필요성

정적분 $\int_0^1 e^{x^2}dx$는 적분값이 존재하지만, 그 값을 구하는 해석학적인 방법을 찾을 수 없다. 따라서 정적분의 근사값을 구하기 위하여 수치적 방법이 필요하다.

수치적분법

구적 마디점 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 가 주어졌을 때, 정적분

$$I[f] \equiv \int_a^b f(x)\,dx$$

의 근사값

$$Q[f] \equiv \Sigma_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

을 구하는 것을 수치적분법(Numerical Integration) 또는 구적법(Quadrature Rule)이라고 하고,

$$E[f] \equiv I[f] - Q[f]$$

을 구적법의 오차라고 한다.

구적법의 종류

미정계수법 : 특정 정밀도가 되도록 가중치를 구하는 일차연립방정식을 푼다.

보간구적법 : 보간함수의 적분값으로 근사값을 주는 경우

Newton-Cotes 구적법 : 마디점들이 동일한 간격인 보간구적법

Gauss-Legendre 구적법 : 마디점들이 Legendre 다항식(정규직교기저함수)의 근.

구적법의 정밀도

구적법 $Q[f]$ 의 **정밀도**는 다음 조건을 만족하는 자연수 n 이다.

(1) n 차 이하의 모든 다항식 $p_n(x)$ 에 대하여 $E[p_n]=0$

(2) $E[p_{n+1}] \neq 0$ 인 $(n+1)$ 차 다항식 $p_{n+1}(x)$ 이 존재한다.

뉴톤-코트 (Newton-Cote) 구적법

함수 $f(x)$ 의 적분값을, 동일한 간격의 마디점들 위의 $f(x)$ 값들을 보간하는 보간다항식 $p_n(x)$ 의 적분값으로, 근사하는 구적법이다. 즉, $Q[f]=I[p_n]$

닫힌 뉴톤-코트 구적법

적분구간의 양끝점들이 마디점에 포함되어 있는 경우에 **닫힌 뉴톤-코트 구적법**이라고 한다. 등간격($h=\dfrac{b-a}{n}$) 마디점들 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 에서 함수 $f(x)$ 을 보간하는 n 차 이하의 다항식 $p_n(x)$ 는 다음과 같다.

$$p_n(x)=\Sigma_{i=0}^{n} f(x_i)\,\ell_i(x)$$

위에서 $\ell_i(x)$ **는** n **차 라그랑지 다항식이다. 따라서 닫힌 뉴톤-코드 구적법은**

$$\begin{aligned} Q[f] &= I[p_n] \\ &= \int_a^b p_n(x)\,dx \\ &= \int_a^b \left[\Sigma_{i=0}^n f(x_i)\,\ell_i(x)\right] dx \\ &= \Sigma_{i=0}^n \left[\int_a^b \ell_i(x)\,dx\right] f(x_i) \\ &= \Sigma_{i=0}^n w_i f_i \end{aligned}$$

위에서 $f_i = f(x_i)$**,** $w_i = \int_a^b \ell_i(x)\,dx$ **이다.**

닫힌 뉴톤-코트 구적법의 종류

$n=1,2,3,4$ 에 대한 뉴톤-코트 구적법은 다음과 같다.

(1) ($n=1$) 사다리꼴 공식

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}h(f_0+f_1),\quad h=b-a$$

(2) ($n=2$) Simpson 공식

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}h(f_0+4f_1+f_2),\quad h=\frac{b-a}{2}$$

(3) ($n=3$) Simpson 3/8 공식

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}h(f_0+3f_1+3f_2+f_3),\quad h=\frac{b-a}{3}$$

(4) ($n=4$) Boole 공식

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2}{45}h(7f_0+32f_1+12f_2+32f_3+7f_4),\quad h=\frac{b-a}{4}$$

[예제 6.1] 적분 $\int_0^1 (1 + e^{-x}\sin(4x))dx$ **의 근사값을 위 4가지 구적법을 이용하여 구하라.**

(풀이) $f(x) = (1 + e^{-x}\sin(4x))$ **라 하자.**

(1) ($n=1$**)** $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$

$$= \frac{1}{2}(1.00000 + 0.72159) = 0.86079$$

(2) ($n=2$**)** $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{3}\frac{1}{2}(f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1))$

$$= \frac{1}{3}(1.00000 + 4 \times 1.55152 + 0.72159)$$
$$= 1.32128$$

(3) ($n=3$) $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{3}{8}\frac{1}{3}(f(0)+3f(\frac{1}{3})+3f(\frac{2}{3})+f(1))$

$$= 1.31440$$

(4) ($n=4$) $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{45}\frac{1}{4}[7f(0)+32f(\frac{1}{4})+12f(\frac{1}{2})$

$$+32f(\frac{3}{4})+7f(1)] = 1.30859$$

한편 $\int_0^1 f(x)dx$ **의 참값은** $1.30825060\cdots$ **이므로** $n=4$ **을 사용하는 Boole 공식의 근사값이 가장 정확함을 알 수 있다.** ■

[숙제] Boole공식의 값을 컴퓨터로 계산하여라.

[예제 6.2] Simpson 3/8 공식에 대한 정밀도를 계산하라.

(풀이)

$[a,b]=[0,3]$ **로 두자. Simpson 3/8 공식**

$$Q[f] = \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

으로부터,

$$I[1] = 3 = \frac{3}{8}(1+3+3+1) = Q[1]$$

$$I[x] = \frac{9}{2} = \frac{3}{8}(0+3+6+3) = Q[x]$$

$$I[x^2] = 9 = \frac{3}{8}(0+3+12+9) = Q[x^2]$$

$$I[x^3] = \frac{81}{4} = \frac{3}{8}(0+3+24+27) = Q[x^3]$$

$$I[x^4] = \frac{243}{5} \neq \frac{99}{2} = \frac{3}{8}(0+3+48+81) = Q[x^4]$$

따라서 Simpson 3/8 공식의 정밀도는 3 이다. ■

보간구적법

마디점들 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 이 임의로 주어졌을 때, 함수 $f(x)$를 보간하는 n차 이하 다항식 $p_n(x)$의 적분값으로 $f(x)$의 적분값을 근사하는 방법.

즉 $Q[f]=I[p_n]$

보간구적법의 정밀도 ($\geq n$)

마디점들 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 에서 함수 $f(x)$를 보간하는 n차 이하 다항식이 $p_n(x)$이면 [정리 5.2]에서

$$f(x)=p_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}W(x), \quad W(x)\equiv \Pi_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

로 주어졌다. 그러므로 구적법의 오차는

$$\begin{aligned} E[f] &= I[f]-Q[f] \\ &= I[f]-I[p_n] \\ &= I[f-p_n] \end{aligned}$$

그러므로

$$E[f] = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} W(x)dx$$

여기에서 원래 함수 $f(x)$가 n차 이하 다항식이라면 $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ 이므로 $E[f]=0$ 이다. 그러므로 $Q[f]=I[f]$, 즉 구적법의 정밀도가 적어도 n이 된다.

[예제 6.3] (미정계수법)

임의의 마디점들 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 주어졌을 때, 다음 구적법 $Q[f]$의 정밀도가 n이 되도록 가중치 $w_0, w_1, \cdots, w_n$의 값을 구하라.

$$\int_a^b f(x)dx = I[f] \approx Q[f] = \Sigma_{j=0}^{n} w_j f(x_j)$$

(풀이) 정밀도가 n이 되기 위하여서는

$$Q[x^k] = I[x^k], \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

이므로 미지수를 $w_0, w_1, \cdots, w_n$로 갖는 일차연립방정식

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I[1] \\ I[x] \\ I[x^2] \\ \vdots \\ I[x^n] \end{bmatrix}$$

을 얻을 수 있다. 이 연립방정식을 풀면 가중치를 구할 수 있다. ■

복합수치적분법

구적법에서 마디점을 늘리면 정밀도는 높아지지만, 구적법 만들기는 더 어려워진다. 따라서 다음과 같이 구간을 나누어, 소구간에 구적법을 적용하는 **복합수치적분법**이 흔히 사용된다.

(1) 구간 $[a, b]$를 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 로 소구간으로 분할한다.

(2) 각 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$에 비교적 낮은 정밀도의 구적법을 적용하여 근사값을 구한다.

(3) 각 소구간에서 구한 근사값을 합한다.

복합사다리꼴 공식

우선 $w(x) \equiv 1$ 을 사용한다. 구간 $[a,b]$ 를 n 등분한 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$ 에 사다리꼴공식을 적용하면

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{1}{2}h[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

이다. 위에서 $h = (b-a)/n$ 이다. 각 소구간의 적분값을 합하면

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \Sigma_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \\ &= \Sigma_{i=1}^n \frac{1}{2}h[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \\ &= \frac{1}{2}h[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\ &= \frac{1}{2}h[f(a) + f(b)] + h\Sigma_{i=1}^{n-1} f(x_i) \equiv T(f,h) \end{aligned}$$

복합 Simpson공식

우선 $w(x) \equiv 1$ 을 사용한다. 구간 $[a,b]$를 $2n$ 등분한 소구간 $[x_{2i-2}, x_{2i}]$에 Simpson 공식을 적용하면

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx = \frac{1}{3}h[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]$$

이다. 위에서 $h = (b-a)/(2n)$ 이다. 각 소구간의 적분값을 합하면

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \Sigma_{i=1}^{n} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \\
&= \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{3}h[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] \\
&= \frac{1}{3}h[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\
&= \frac{1}{3}h[f(a) + f(b)] + \frac{2}{3}h\Sigma_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + \frac{4}{3}h\Sigma_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) \equiv S(f,h)
\end{aligned}$$

[예제 6.4] $f(x) = 2 + \sin(2\sqrt{x})$ **일 때,** $\int_1^6 f(x)dx$ **의 근사값을 복합사리꼴 공식과 복합 Simpson 공식을 이용하여 각각 구하여라. 구간은** 10 **등분하라.**

(풀이)

(1) 복합사다리꼴 **(**$n = 10,\ h = \dfrac{6-1}{10} = \dfrac{1}{2}$**)**

$$T(f, 1/2) = \frac{1}{2}h\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \ \cdots\ + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left[f(1) + 2f(1.5) + \ \cdots\ + 2f(5.5) + f(6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left[f(1) + f(6)\right] + \frac{1}{2}\left[f(1.5) + \ \cdots\ + f(5.5)\right]$$

$$\approx 8.19385457$$

한남대학교 수학과 김상배교수

(2) 복합Simpson $\left(n=5,\ h=\dfrac{6-1}{2\times 5}=\dfrac{1}{2}\right)$

$$S(f,1/2)=\frac{1}{3}h[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\ \cdots\ +4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{2}[f(1)+4f(1.5)+2f(2)+\ \cdots\ +4f(5.5)+f(6)]$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{2}[f(1)+f(6)]+\frac{1}{3}\frac{2}{2}[f(2)+f(3)+\ \cdots\ +f(5)]$$

$$+\frac{1}{3}\frac{4}{2}[f(1.5)+f(2.5)+\ \cdots\ +f(5.5)]$$

$$\approx 8.18301550 \quad ■$$

[숙제] p312 #1 (4) 복합사다리꼴(n=10),

(1) 컴퓨터숙제 (2) 지필숙제 Wolframalpha에서 적분값을 계산하여 비교

정밀도 n의 보간구적법(복습)

$(n+1)$개의 마디점 $x_0, x_1, \cdots, x_n$이 주어지면 아래와 같은 보간다항식을 사용하는 보간구적법은 정밀도가 최소한 n임을 보였다.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Sigma_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{with } w_i = \int_a^b \prod_{(j=0, j\neq i)}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx$$

Gauss구적법 (정밀도 $(2n+1)$)

함수 $q(x)$가 영함수가 아닌 n차 이하의 모든 다항식에 직교하는 함수라면, $q(x)$의 근들을 마디점 $x_0, x_1, \cdots, x_n$이 주는 구적법을 Gauss구적법이다.

가우스구적법의 정밀도는 다음 정리에서 증명하는 것처럼 $(2n+1)$가 된다.

[정리 6.6] 정밀도 $(2n+1)$의 Gauss구적법

마디점들 $x_0, x_1, \cdots, x_n$이, 영함수가 아닌 n차 이하의 모든 다항식에 직교하는, $(n+1)$차 다항함수 $q(x)$의 근들로 주어지면, 이 구적법 (1)은 정밀도$(2n+1)$가 된다.

(증명)

함수 $f(x)$가 $(2n+1)$차 이하 다항식이라면 $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$를 만족하는 n차 이하 다항식 $p(x)$와 $r(x)$가 존재한다. 그런데, $q(x_i) = 0$, $^\forall i = 0, 1, \cdots, n$ 이므로$f(x_i) = r(x_i)$가 성립한다. 한편 $p(x)$의 차수는 n이고, $q(x)$는 n차 이하 다항식에 직교하므로

$$0 = < p, q > = \int_a^b p(x)q(x)\,dx$$

그러므로

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [p(x)q(x) + r(x)]\,dx$$

$$= \int_a^b r(x)\,dx$$

$= \Sigma_{i=0}^{n} w_i\, r(x_i)$ since $r(x)$의 차수가 n, 정밀도 n

$= \Sigma_{i=0}^{n} w_i\, f(x_i)$ since $f(x_i) = r(x_i)$

따라서 구적법 (1)은 정밀도 $(2n+1)$을 갖는다. ■

[정리 6.7] 내적 $< f, g > \; = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ 이 주어졌을 때, n차 이하의 모든 다항식과 직교하는 $(n+1)$차 다항식 $q(x)$는 구간 (a, b)에서 $(n+1)$개의 서로 다른 실근을 갖는다.

(증명)

먼저 $< q, 1 > = 0$이므로

$$\int_a^b q(x)(1)\,dx = 0$$

$q(x)$는 구간 (a,b)에서 적어도 한번 부호가 변한다. 왜냐하면 $q(x)$가 한가지 부호만 가지면 적분값이 영이 나올 수가 없기 때문이다. 이제 $q(x)$가 구간(a,b)에서 $k(\leq n)$번 부호가 변한다고 가정하자. 그러면 어떤 k개의 마디점

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < b = t_{k+1}$$

들이 존재하여, $q(x)$가 각 마디점을 전후로 부호가 변한다고 하자. 여기서

$$p(x) \equiv (x - t_1)(x - t_2) \cdots (x - t_k)$$

로 정의하면 곱한 함수 $p(x)q(x)$는 항상 양수값을 갖든지, 항상 음수값을 갖게 된다. 그러므로

$$< p,q > = \int_a^b p(x)q(x)\,dx \neq 0$$

이다. 이것은 k차 다항식 $p(x)$가 $q(x)$와 직교한다는 가정에 어긋난다.
그러므로 $q(x)$가 구간(a,b)에서 적어도 $(n+1)$번 부호가 변한다. 한편 $q(x)$는 $(n+1)$차 다항식이므로 부호가 $(n+1)$번 보다 더 많이 변할 수는 없다.
그러므로 연속인 $q(x)$는 구간(a,b)에서 $(n+1)$개의 실근을 갖는다. ■

Gauss-Legendre 구적법

다항식 $\{1, x, x^2, \cdots\}$을 그램-슈미트 방법으로 정규 직교화 한 기저

$$\{q_0(x), q_1(x), q_2(x), \cdots\}$$

의 원소를 **Legendre다항식**이라고 한다. 이 Legendre다항식의 근을 마디점으로 사용하는 Gauss구적법을 특히 **Gauss-Legendre 구적법**이라고 한다.

[예제 6.7] 다음 Gauss구적법의 마디점 x_0, x_1과 가중치 w_0, w_1를 구하여라.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

(풀이)

그램-슈미트 방법을 써서 $\{1, x, x^2\}$에 대응하는 직교다항식들을 구하면,

$$q_0(x) = 1,\ q_1(x) = x,\ q_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

들이다. 따라서 $q_2(x)=0$의 근

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

이 구적법의 마디점들이 된다. $q_2(x)$는 [정리6.6]에서 $(n+1)$차 다항식이므로 $n=1$인 경우라서 정밀도가 $(2n+1)=3$이 된다. 즉 3차 다항식까지는 구적법이 참값을 준다. 이 사실을 이용하여 w_0, w_1을 구해 보자.

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = w_0 1 + w_1 1$$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = w_0 x_0 + w_1 x_1$$

이므로

$$\begin{aligned} 2 &= w_0 + w_1 \\ 0 &= w_0(-1/\sqrt{3}) + w_1(1/\sqrt{3}) \end{aligned}$$

이 되어 $w_0 = w_1 = 1$을 얻는다. ■

적분구간 $[a,b]$ 에서 Gauss구적법 계산하기

변수변환

$$t = \frac{x-1}{-1-1}a + \frac{x+1}{1+1}b \ , \ \ (-1 \le x \le 1)$$

$$= \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x$$

를 사용하면

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{-1}^1 f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x\ )\frac{b-a}{2}dx$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x\ )dx$$

$$\approx \frac{b-a}{2}\Sigma_{i=0}^{m}\ w_i f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x_i\ )$$

와 같이 $[a,b]$ 위의 적분을 $[-1,1]$ 위의 적분으로 대치하고 $(m+1)$ 개의 마디점을 사용하는 Gauss-Legendre 구적법을 적용할 수 있다.

[예제] 2점 가우스 구적법을 사용하여 $\int_1^5 (-x^3+3x)dx$ **의 값을 구하여라.**

(풀이) $f(x) = -x^3+3x$ **일 때**

$$\int_1^5 f(x)dx = \frac{5-1}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{5+1}{2}+\frac{5-1}{2}x)dx$$

$$= 2\int_{-1}^{1} f(2x+3)dx$$

$$\approx 2\left[w_0 f(2\frac{-1}{\sqrt{3}}+3)+w_1 f(2\frac{1}{\sqrt{3}}+3)\right]$$

$$= 2[f(1.8453)+f(4.1547)]$$

$$= 2[-0.7476-59.2524]$$

$$= -120$$

■

복합 Gauss-Legendre 구적법

적분 구간 $[a,b]$를 n등분 한다음 각 소구간에 Gauss-Legendre 구적법을 적용하면 복합 Gauss-Legendre 구적법을 만들 수 있다.

$$\int_a^b f(t)dt \approx \Sigma_{j=1}^{n}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{2}\Sigma_{i=0}^{m} w_i f(\frac{t_j + t_{j-1}}{2} + \frac{t_j - t_{j-1}}{2}x_i)\right)$$

$$= \frac{h}{2}\Sigma_{j=1}^{n}\left(\Sigma_{i=0}^{m} w_i f(\frac{t_j + t_{j-1}}{2} + \frac{h}{2}x_i)\right)$$

여기서 $h = \dfrac{b-a}{n},\ t_j = a + j\,h,\ (0 \le j \le n)$

[숙제] p322 #7 (2) Gauss-Legendre구적법, 마디점 2개인 경우 WolframAlpha 의 값과 비교

#9 (1) 복합 Gauss-Legendre구적법, 마디점 2개인 경우, 10등분 WolframAlpha 의 값과 비교

제7장 미분방정식의 수치해법

초기값 문제

다음 미분방정식과 초기조건

$$y' = f(x, y),\ \ x \in [a, b]$$
$$y(a) = \alpha$$

을 초기값 문제라고 한다.

[예제] 다음 초기값 문제를 풀어라.

$$y'(x) = \sin(x),\ \ y(\frac{\pi}{3}) = 2$$

(풀이) 미분방정식의 양변을 적분하면,

$$y(x) = -\cos(x) + c$$

을 얻는다. 적분 상수 c를 정하기 위하여 초기조건을 사용하면

$$2 = -\cos(\pi/3) + c$$

그러므로 $c = 2.5$ 이고, 구하는 해는

$$y(x) = 2.5 - \cos(x)$$

이다. ■

오일러 방법

구간 $[a, b]$ 를 n 등분하여 $h = \dfrac{b-a}{n}$ 이라 하고, 마디점들을

$$x_i = a + ih, \; i = 0, 1, \cdots, n$$

로 놓고, $y_i = y(x_i)$ 라고 놓자. 도함수 y' 에 대하여 전향수치미분식을 사용하면 초기값문제는

$$y_0 = \alpha$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \; i = 0, 1, \cdots, n$$

와 같이 수치적을 풀 수 있다. 다음 방법을 **오일러방법**이라고 한다.

$$y_0 = \alpha$$
$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i), \;\; i = 0, 1, \cdots, n$$

[예제] 다음 초기치문제의 정확한 해가 $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ **임을 보이고, 오일러 방법** $(n=10)$ **을 이용하여 초기값문제**

$$y' = -2xy^2, \quad 0 \le x \le 2$$
$$y(0) = 1$$

의 근사값을 구하고, 정확한 해와 비교하여라.

[숙제] $y' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x} - y^2, \; 1 \le x \le 2$

$y(1) = -1$

참해 : $y = -\dfrac{1}{x}$

Taylor 방법

초기값 문제

$$y' = f(x, y),\ x \in [a, b]$$
$$y(a) = \alpha$$

가 유일한 해를 갖고 $y^{(n+1)}(x)$ **가 존재하고 연속임을 가정하자. 구간** $[a, b]$ **를** n **등분하여** $h = \dfrac{b-a}{n}$ **이라 하고, 마디점들을**

$$x_i = a + ih,\ i = 0, 1, \cdots, n$$

로 놓자. Taylor 정리에 의하여, $\exists \xi \in (x_i, x_{i+1})$**:**

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi)$$

이다. Taylor 방법은 위에서 마지막 항을 잘라버리고,

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_i)$$

을 사용한다. 여기에서 $y'(x_i), y''(x_i), \cdots, y^{(n)}(x_i)$ 는 $y' = f(x,y)$ 를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$$

$$y''(x_i) = \frac{d}{dx} f(x,y) \bigg|_{(x_i, y(x_i))}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}(x_i) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x,y) \bigg|_{(x_i, y(x_i))}$$

[예제] 초기값문제

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$

에 $h = 0.1$ 와 3 차 Taylor 방법을 이용하여 $y(0.1)$ 과 $y(0,2)$ 의 근사값을 구하여라.

(풀이) $y' = x + y$

$$\Rightarrow \; y'' = \frac{d}{dx}(x+y) = 1 + y' = 1 + x + y$$

$$\Rightarrow \; y''' = \frac{d}{dx}(1+x+y) = 1 + y' = 1 + x + y$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i)$$

$$= y(x_i) + h\,(x_i + y_i) + \frac{h^2}{2}(1 + x_i + y_i) + \frac{h^3}{6}(1 + x_i + y_i)$$

$x_0 = 0,\ y(x_0) = 1$

$$\Rightarrow \; y_1 = y(x_0) + h\,(x_0 + y_0) + \frac{h^2}{2}(1 + x_0 + y_0) + \frac{h^3}{6}(1 + x_0 + y_0)$$

$$= 1 + 0.1\,(0+1) + \frac{(0.1)^2}{2}(1+0+1) + \frac{(0.1)^3}{6}(1+0+1)$$

$$\approx 0.11033$$

$$\Longrightarrow y_2 = y(x_1) + h\,(x_1 + y_1) + \frac{h^2}{2}(1 + x_1 + y_1) + \frac{h^3}{6}(1 + x_1 + y_1)$$

$$= y_1 + 0.1\,(0.1 + y_1) + \frac{(0.1)^2}{2}(1 + 0.1 + y_1) + \frac{(0.1)^3}{6}(1 + 0.1 + y_1)$$

$$= 1.24278 \qquad \blacksquare$$

[숙제] $y' = x^2,\ \ y(0) = 1,\ \ h = 0.02$ $\quad$ 5**차 Taylor 방법으로 풀어라.**

2차 Runge-Kutta법

초기값 문제

$$y' = f(x,y),\ \ x \in [a,b]$$
$$y(a) = \alpha$$

가 유일한 해를 갖고 연속임을 가정하자. 구간 $[a,b]$ **를** n**등분하여** $h = \dfrac{b-a}{n}$

이라 하고, 마디점들을

$$x_i = a + ih,\ i = 0, 1,\ \cdots\ , n$$

로 놓자. 2차 Runge-Kutta법

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + a k_1 + b k_2 \quad \text{--(*)}$$

을 구성하는데, (*)를 Taylor급수로 전개하였을 때와 비슷하도록, 실수 α, β, a, b를 정하여 보자. k_1, k_2를 (*)에 대입하고 Taylor급수를 전개하면,

$$y_{i+1} = y_i + ahf(x_i, y_i) + bhf(x_i + \alpha h,\ y_i + \beta k_1)$$

여기서

$$f(x_i + \alpha h,\ y_i + \beta k_1) = f(x_i, y_i) + (\alpha h f_x + \beta k_1 f_y) + \left(\frac{(\alpha h)^2}{2!} f_{xx} + \frac{2(\alpha h \beta k_1)}{2!} f_{xy} + \frac{(\beta k_1)^2}{2!} f_{yy}\right) + O(h^3)$$

한남대학교 수학과 김상배교수

이므로

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + ahf + bh\Big[f + (\alpha h f_x + \beta(hf) f_y) \\
&\qquad + \left(\frac{\alpha^2 h^2}{2} f_{xx} + \alpha h \beta (hf) f_{xy} + \frac{\beta^2 (hf)^2}{2} f_{yy}\right) + O(h^3)\Big] \\
&= y_i + h(a+b) f + h^2 (b\alpha f_x + b\beta f f_y) \\
&\qquad + h^3 b\left(\frac{\alpha^2}{2} f_{xx} + \alpha\beta f f_{xy} + \frac{\beta^2}{2} f^2 f_{yy}\right) + O(h^4) \quad \text{---(**)}
\end{aligned}
$$

한편, $y(x_{i+1})$ **를** x_n **근방에서 Taylor급수를 전개하면,**

$$
y(x_{n+1}) = y(x_i) + h\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + O(h^4)
$$

여기에서

$$
y' = f(x, y)
$$

$$
y'' = \frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f_x + f_y f
$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(f_x + f_y f)$$

$$= \left(\frac{d}{dx} f_x\right) + \left(\frac{d}{dx} f_y\right) f + f_y \left(\frac{d}{dx} f\right)$$ **, by 곱의 미분**

$$= \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{\partial f_y}{dx}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) f$$

$$+ f_y \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)$$ **, by 연쇄법칙**

$$= f_{xx} + f_{xy} f \ + (f_{yx} + f_{yy} f) f + f_y (f_x + f_y f)$$

$$= f_{xx} + f_{xy} f \ + f_{yx} f + f_{yy} f^2 + f_y f_x + f_y^2 f$$

$$= f_{xx} + 2 f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_x f_y + f_y^2 f$$

그러므로

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h f + \frac{h^2}{2}(f_x + f f_x)$$

$$+ \frac{h^3}{6}(f_{xx} + 2 f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_x f_y + f_y^2 f) + O(h^4)$$ **---(***)**

한남대학교 수학과 김상배교수

이 된다. 식 (**)과 식(***)을 비교하면,

$$a + b = 1$$

$$b\alpha = b\beta = 1/2$$

이 된다. 위 식을 만족하는 a, b, α, β 는 여러 가지가 있으나,

$$a = b = 1/2\,,\ \alpha = \beta = 1$$

을 택하여 2 차 Runge-Kutta법

$$k_1 = h\,f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h\,f(x_i + h,\, y_i + k_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + k_2)/2$$

을 얻는다.

4 차 Runge-Kutta 법

가장 많이 사용하는 4차 Rung-Kutta법은 오차가 $O(h^5)$ 인데, 유도하려면 매우

복잡한데 결론적으로 4차 Runge-Kutta법은 다음과 같다.

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$$

$$k_3 = hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$$

$$k_3 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

[예제] 초기값문제 $y' = x - y,\ 0 \le x \le 1$

$y(0) = 1$

에 대하여 2**차 Rung-Kutta방법 (** $n = 10$ **) 이용하여 구하고, 참해**

$y = 2e^{-x} + x - 1$ **와 비교하여라.**

[숙제] 4**차 Rung-Kutta방법**

한남대학교 수학과 김상배교수

경계값 문제

다음 미분방정식과 초기조건

$$y'' = f(x, y, y'),\ x \in [a, b]$$
$$y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$$

을 경계값 문제라고 한다.

유한차분법

구간 $[a,b]$를 n등분하여 $h = \frac{b-a}{n}$이라 하고, 마디점들을

$$x_i = a + ih,\ i = 0, 1, \cdots, n$$

로 놓고, $y_i = y(x_i)$라고 놓자. 도함수 y'와 2계도함수 y''를 각각

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$$

로 근사하면, 미분방정식은 차분방정식이 된다.

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}=f(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h})\ ,\ i=1,2,\cdots,n-1$$

경계조건 $y_0=\alpha, y_n=\beta$ 를 이용하면, 일반적으로는 $(n-1)$개의 비선형 연립방정식이 된다. 하지만, $f(x,y,y')$이 선형(y와 y'에 대하여 1차이고, 그 계수들이 x만의 함수인 경우)으로 주어지면 그 차분방정식이 선형연립방정식이 되어 Gauss소거법이나 Jacobi 반복법 등으로 근사해를 구할 수 있다.

[예제] 경계값 문제

$$y''-xy=x^2$$

$$y(1)=2,\ y(2)=1$$

의 근사값을 유한차분법($(n=4)$)으로 구하여라.

(풀이)

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{4}=0.25$$ 이다.

마디점 $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{1.0, 1.25, 1.50, 1.75, 2.0\}$에 대하여

차분방정식을 구하면

$$\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} - 1.25\,y_1 = 1.25^2$$

$$\frac{y_1 - 2y_2 + y_2}{h^2} - 1.50\,y_2 = 1.50^2$$

$$\frac{y_2 - 2y_3 + y_4}{h^2} - 1.75\,y_3 = 1.75^2$$

정리하면

$$\begin{aligned} y_0 - (2 + 1.25\,h^2)y_1 + y_2 &= 1.25^2 h^2 \\ y_1 - (2 + 1.50\,h^2)y_2 + y_2 &= 1.50^2 h^2 \\ y_2 - (2 + 1.75\,h^2)y_3 + y_4 &= 1.75^2 h^2 \end{aligned}$$

이되고, 행렬 형식으로 쓰면

$$\begin{bmatrix} -2-1.25h^2 & 1 & 0 \\ 1 & -2-1.50h^2 & 1 \\ 0 & 1 & -2-1.75h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25^2h^2 - y_0 \\ 1.50^2h^2 \\ 1.75^2h^2 - y_4 \end{bmatrix}$$

이 된다. 위 선형연립방정식을 Gauss소거법으로 풀면

$$y_1 = 1.4049,\ y_2 = 1.0173,\ y_3 = 0.8656$$

을 얻는다. ■

[숙제] 경계값 문제

$$y'' - xy = 1,\ 0 < x < 1$$
$$y(0) = 1,\ y(1) = 2$$

의 근사값을 유한차분법($(n=4)$)으로 구하여라.

한남대학교 수학과 김상배교수

[예제] 경계값 문제

$$y'' + 4(\sin x)y' - 4(\cos x)y = -\sin x$$

$$y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1$$

의 근사값을 유한차분법($(n=5)$**으로 구하여라. 참해** $y = \sin x$ **와 비교하라.**

(풀이)

주어진 미분방정식을 차분방정식으로 바꾸면 다음과 같다.

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - 4(\sin x_i)\frac{y_{i-1} - y_{i+1}}{2h} - 4(\cos x_i)y_i = -\sin x_i$$

$$(2 - 4h\sin x_i)y_{i-1} + (-4 - 8h^2\cos x_i)y_i + (2 + 4h\sin x_i)y_{i+1} = -2h^2\sin x_i \quad ■$$

[숙제] 경계값 문제

$$y'' - y' + 2y = \cos x - \sin x,\ 0 < x < \pi/2$$

$$y(0) = 1,\ y(\pi/2) = 0$$

의 근사값을 유한차분법$(n=5)$**으로 구하여라. 참해** $y = \cos x$ **와 비교하라.**