미분기하학 1학기

김상배 교수 : xxx@hnu.kr

http://sbk.hnu.kr/Lectures

010-XXXX-7867

문자메세지, 카톡(공부내용 질문)

교과서 : 미분기하학개론

저자: 김향숙,박진석,표용수

출판사: 경문사

수학 : 수와 도형

1) 도형 : 기하학

고대 이집트, 그리이스 플라톤의 아카데미, 유클리드 `원론'

2) 수 : 자연수, 정수, 유리수, 무리수, 복소수

약수와 배수, 솟수(prime number), 정수론

방정식 : 미지수로 등식을 만든다.

대수학 : (대수=숫자를 대신 한 것 =문자=미지수)

방정식 풀기, 아벨, 갈르와-> 현대대수

3) 좌표 : 데카르트 (400년전 쯤), 해석기하학의 창시자

해석학: 무한히 ~ 한다. 함수

연속, 미분, 적분, 급수, 미분기하

4) 집합 : 실수집합을 기초로 추상구조로 확장됨.

제1장 벡터(복습과정)

벡터의 연산

합과 스칼라배

결합, 분배법칙, 벡터의 길이

내적

내적의 성질, 벡터의 평행과 직교

코시-슈바르츠 부등식, 삼각부등식, 피타고라스 정리

정규직교기저, 표준정규직교기저

정사영, 벡터사영

외적

외적의 성질, 스칼라 삼중적

직선과 평면

직선의 방정식

평면의 방정식

벡터장

접벡터(tanget vector)

벡터장(vector field)

점별원리

정규직교기저

표구장(frame field)

자연표구장

주면표구장

구면표구장

제2장 곡선의 국소적 이론

2.1 공간곡선

도함수와 미분가능

실수구간 $I=(a,b)$ 위의 벡터함수

$$\alpha : I \rightarrow E^3$$

$$\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$$

는 공간곡선을 나타내며, 극한값

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)}{\Delta t}$$

가 존재하면 $\alpha(t)$는 "미분가능하다" 고 하고, 그 극한값을 $\alpha(t)$의

도함수(derivative)라 하며, $\dfrac{d\alpha}{dt}$로 표시 한다.

[예제] $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ **이면** $\dfrac{d\alpha}{dt} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right)$ **임을 보여라.**

(풀이)
$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t)) - (x(t), y(t), z(t))}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(x(t+\Delta t) - x(t), y(t+\Delta t) - y(t), z(t+\Delta t))}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right) \\
&= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)
\end{aligned}$$

[예제]

(1) 점 $p=(p_1,p_2,p_3)$**를 지나고** $q=(q_1,q_2,q_3)$**를 방향벡터로 하는 직선은** $\alpha(t)=p+tq=(p_1+tq_1,p_2+tq_2,p_3+tq_3)$ **로 주어진다.**

(2) 공간곡선 $\alpha(t)=(a\cos(t),a\sin(t),0),t\in(-\infty,\infty)$**는** xy**평면에서 원점을 중심으로 반지름이** a**인 원의 둘레를 움직인다.**

(3) $\alpha(t)=(a\cos(t),a\sin(t),bt),t\in(-\infty,\infty)$ **여기에서** $a>0,b\neq 0$ **는 나선 (circular helix)이라고 한다.**

(4) $\alpha(t)=(t+3,t^2+3,0),t\in(-\infty,\infty)$**는** xy**평면에 놓인 포물선** $y=(x-3)^2+3$ **이다.**

속도벡터

공간곡선 $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$, $t\in I$ 에 대하여 점 $\alpha(t)$에서의

접벡터 $\alpha'(t)=\left(\dfrac{d\alpha_1(t)}{dt},\dfrac{d\alpha_2(t)}{dt},\dfrac{d\alpha_3(t)}{dt}\right)_{\alpha(t)}$ 를 t에서의 α의

속도벡터(velocity vector) 라고 한다.

가속도벡터

공간곡선 $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$, $t\in I$ 에 대하여 점 $\alpha(t)$에서의

$\alpha''(t)=\left(\dfrac{d^2\alpha_1(t)}{dt^2},\dfrac{d^2\alpha_2(t)}{dt^2},\dfrac{d^2\alpha_3(t)}{dt^2}\right)_{\alpha(t)}$ 를 t에서의 α의

가속도벡터(acceleration vector) 라고 한다.

속력

공간곡선 $\alpha(t)$에 대하여 **속력(speed)**는 $v(t)=\|\alpha'(t)\|$로 정의한다.

정칙곡선

공간곡선 $\alpha(t)$에 대하여 $\forall t \in I, \alpha'(t) \neq 0$ 일 때, 곡선 α를 정칙곡선 (regular curve) 라고 한다.

접선의 방정식

정칙곡선 α의 $t = t_0$에서의 접선의 방정식 (equation of tagent line)은 $x(t) = \alpha(t_0) + t\alpha'(t_0),\ t \in \mathrm{R}$ 이다.

재매개화

I, J를 R에서 열린구간이라 하자. $\alpha : I \to E^3$는 공간곡선이고 $h : J \to I$ 가 미분가능함수이면, 합성함수 $\beta : J \to E^3$, $\beta = \alpha \circ h$를 h에 의한 α의 재매개화(reparametrization) 라고 한다.

[예제] **(주의 : S 는 호장은 아님)**

곡선 $\beta(s)=(\cos(2s),\sin(2s),0),s\in(0,\pi)$ **는 반지름의 길이가 1인 원** $\alpha(t)=(\cos(t),\sin(t),0),t\in(0,2\pi)$ **의** $t=h(s)=2s$ **에 의한 재매개화임.**

[예제] **(주의 : S 는 호장은 아님)**

$\alpha(t)=(\sqrt{t},t\sqrt{t},1-t)$ **,** $\beta(s)=(s,s^3,1-s^2)$

[정리] β **가** h **에 의한** α **의 재매개화라고 하면, 다음이 성립한다.**

$$\beta'(s)=h'(s)\alpha'(h(s))$$

호장(arc length)

폐구간 $I=[a,b]$ **에 대하여 곡선** $\alpha:I\to E^3$ **를 호(arc)라고 하고**

$$s=\int_a^b\|\alpha'(t)\|dt$$

를 $t=a$ **에서** $t=b$ **까지의** α **의 호장(arc length)라고 한다.**

(설명) $s=\int_a^b ds=\int_a^b \|d\alpha\| = \int_a^b \|\frac{d\alpha}{dt}\|dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\|dt$

[예제]

반지름의 길이가 a **인 원** $\alpha(t)=(a\cos(t), a\sin(t), 0), t\in[0,2\pi]$ **의 원주는** $\int_0^{2\pi}\|\alpha'(t)\|dt = \int_0^{2\pi} a\,dt = 2\pi a$ **이다.**

[예제]

호 $\alpha(t)=(3\cosh(2t), 3\sinh(2t), 6t), t\in[0,\pi]$ **의 길이** s **는**

$\|\alpha'(t)\| = 6\sqrt{2}\cosh(2t)$ **로부터,**

$$s = 6\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\cosh(2t)\,dt = 3\sqrt{2}\sinh(2\pi)$$

[정리] 곡선 $\alpha: I \to E^3$ **가 정칙이면, 단위속력을 갖는** α **의 재매개화가 존재한다. 즉 호장에 의한 재매개화가 존재한다.**

[증명] I **위의 한점** a**(보통** $a=0$ **으로 선택)를 택하여 호장함수**

$$s(t)=\int_a^t \|\alpha'(u)\|du$$

를 생각하자. 도함수 $s'(t)=\|\alpha'(t)\|$ **에서** α**가 정칙곡선이므로** $\alpha'(u)\neq 0, \forall u$**이다. 그러므로** $s'(t)>0$**가 되어** $s(t)$**증가함수가 되어,** $s(t)$**는 일대일함수이다. 그럼므로 역함수** $t=t(s)$**를 가진다.** β**를** s**에 의한** α**의 재매개화** $\beta(s)=\alpha(t(s))$**라고 하면** β**는 단위속력 곡선이다. 왜냐하면,** $\beta'(s)=\alpha'(t(s))t'(s)$ **에서** $t(s)$**가** $s(t)$**의 역함수이므로**

$t'(s)=\dfrac{1}{s'(t)}>0$ **이다. 그러므로**

$$\|\beta'(s)\|=\|\alpha'(t(s))\|\frac{1}{s'(t)}$$

$$=s'(t)\frac{1}{s'(t)}=1 \quad \textbf{since} \quad s'(t)=\|\alpha'(t)\|$$

그러므로 β**는 단위속력을 갖는** α**의 재매개화이다.** ■

[예제]

나선의 호장에 의한 재매개화를 구하여라.

(풀이)

나선 $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$**의 호장함수는**

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du$$

$$= \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, du = \sqrt{a^2+b^2}\, t$$

이므로 $s(t)$**의 역함수는** $t = \frac{s}{c}$, $(c = \sqrt{a^2+b^2})$ **이다.** $\alpha(t)$**에** t**를**

대입하면 호장에 의한 재매개화 $\beta(s)$**는**

$$\beta(s) = \left(a\cos(\frac{s}{c}), a\sin(\frac{s}{c}), \frac{b}{c}s\right)$$ **이다.** ■

[예제]

곡선 $\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t), t \in (-\infty, \infty)$ **의 호장에 의한 재매개화를 구하여라.**

(풀이)

$$\alpha'(u) = (e^t \cos(t) - e^t \sin(t), e^t \sin(t) + e^t \cos(t), e^t)$$

$$= e^t (\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), 1)$$

$$\|\alpha'(u)\| = e^t (2\cos^2(t) + 2\sin^2(t) + 1)^{1/2} = e^t \sqrt{3}$$

이므로 호장함수 $s(t)$ **는**

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \sqrt{3} \int_0^t e^u du = \sqrt{3}(e^t - 1)$$

이고, $s(t)$ **의 역함수는**

$$t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right), \ s \in (-\sqrt{3}, \infty)$$

이다. 따라서 곡선 $\alpha(t)$ **의 호장에 의한 재매개화** $\beta(s)$ **는**

$$\beta(s) = (\frac{s}{\sqrt{3}}+1)(\cos(\ln(\frac{s}{\sqrt{3}}+1)),\sin(\ln(\frac{s}{\sqrt{3}}+1)),1)$$

으로 표현된다. ■

[정리]

(1) 공간곡선 α **가 상수** $\Leftrightarrow \alpha' = 0$

(2) 상수 아닌 공간곡선 α **가 직선** $\Leftrightarrow \alpha'' = 0$

(숙제)

(1) 곡선 $\alpha(t) = (\sin(3t)\cos(t), \sin(3t)\sin(t), 0)$ **은 정칙곡선임을 보이고,** $t = \dfrac{\pi}{3}$ **에서의 접선의 방정식을 구하여라.**

(2) 곡선 $\alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$ **의 호장에 의해 재매개화를 구하여라.**

2.2 곡률과 열률

곡률과 열률의 정의

단위속력곡선 $\beta : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$**에 대하여,**

(1) 단위접벡터장(unit tangent vector field) : $\mathrm{T}(s) = \beta'(s)$

(2) 곡률벡터장(curvature vector field) : $\mathrm{T}'(s) = \beta''(s)$

(3) 곡률(함수) (curvature function) : $\varkappa(s) = \|\mathrm{T}'(s)\|$

(4) 단위 주 법 벡터장(unit principal normal vector field) :

$$\mathrm{N}(s) = \mathrm{T}'(s)/\varkappa(s) \quad (\ \varkappa(s) \neq 0\ )$$

(5) 단위 종 법 벡터장(unit binormal vector field) : $\mathrm{B}(s) = \mathrm{T}(s) \times \mathrm{N}(s)$

(6) 열률(함수) (torsion function) : $\tau(s) = -\langle \mathrm{B}'(s), \mathrm{N}(s) \rangle$

[정리] 정칙곡선 α는 직선 $\Leftrightarrow$ $\varkappa \equiv 0$

($\Longrightarrow$) α가 직선

$\Longrightarrow \exists\, \mathbf{p}, \mathbf{q}: \alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{q},\ {}^{\forall}\mathrm{t} \in \mathrm{I}, (\mathrm{q} \neq 0)$

$\alpha'(t) = \mathrm{q}$ **이므로 호장함수는**

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{q}\|\, du = \|\mathrm{q}\|\, t$$

호장에 의한 재매개화 $\beta(s)$는

$$\beta(s) = \mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} s$$

이고 단위접벡터장 $\mathrm{T}(s) = \beta'(s) = \dfrac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$ 이다. 그러므로

$$\varkappa(s) = \|\mathrm{T}'(\mathrm{s})\| = 0,\ {}^{\forall}\mathrm{s}$$

(⟸) $\varkappa \equiv 0$

$\Rightarrow \ \|\mathrm{T}'(s)\| = \varkappa(s) = 0, {}^{\forall}s$ **여기에서** s**는 호의 길이.**

$\Rightarrow \ \mathrm{T}\,'(s) = 0, {}^{\forall}s$

$\Rightarrow \ \beta''(s) = \mathrm{T}\,'(s) = 0, {}^{\forall}s$

여기서 $\beta(s)$**는 호장에 의한** $\alpha(t)$**의 재매개화라고 하자.**

$\Rightarrow \ \beta(s) = \mathrm{a}t + \mathrm{b}$**, 여기에서** a,b**는 상수벡터.**

그러므로 $\beta(s)$**는 직선이다.**

따라서 원래의 $\alpha(t)$**도 직선이다.** ■

[정리] β**가** $\varkappa > 0$**인 단위속력의 공간곡선이면,** β**의 각 점에서 벡터장** $\{\mathrm{T},\mathrm{N},\mathrm{B}\}$**는 한 표구를 이룬다.**

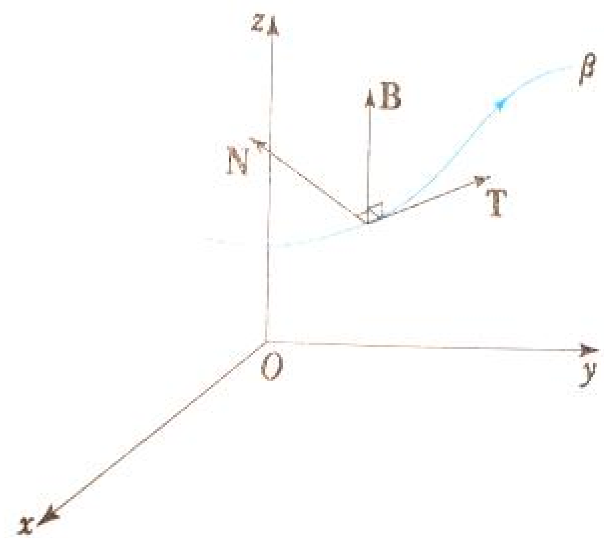
(증명)

다음페이지에

(증명)

정의 $\mathrm{T}=\beta'$ **에 의하여** $\|\mathrm{T}\|=1$ **이고,** $\varkappa=\|\mathrm{T}'\|>0$ **이므로**

$$\mathrm{N}=\frac{\mathrm{T}'}{\varkappa},\ \|\mathrm{N}\|=\frac{\|\mathrm{T}'\|}{\varkappa}=1$$



이다. $<\mathrm{T},\mathrm{T}>=\|\mathrm{T}\|^2=1$ **를 미분**

$$\Rightarrow\ <\mathrm{T}',\mathrm{T}>+<\mathrm{T},\mathrm{T}'>=0$$

$$\Rightarrow\ 2<\mathrm{T},\mathrm{T}'>=0$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{T}\perp\mathrm{T}'$$

이므로 $\mathrm{N}\perp\mathrm{T}$ **이다. 또한** $\mathrm{B}=\mathrm{T}\times\mathrm{N}$ **이므로** $\mathrm{B}\perp\mathrm{T},\mathrm{B}\perp\mathrm{N}$ **이다.**

그러므로 $\{\mathrm{T},\mathrm{N},\mathrm{B}\}$**는 곡선 위의 각 점에서 표구를 이룬다.** ■

[참고] $\{\mathrm{T},\mathrm{N},\mathrm{B}\}$**를 동삼면체(Moving Trihedron) 또는 Frenet 표구장 (Frenet frame field)라 한다.**

[예제] 나선 $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, $a > 0, b \neq 0$**의 호장에 의한 재매개화는** $\beta(s) = \left(a\cos(\frac{s}{c}), a\sin(\frac{s}{c}), \frac{b}{c}s\right)$, $c = \sqrt{a^2+b^2}$ **임을 보였다. 단위속력 나선** $\beta(s)$**의** $\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B}, \varkappa, \tau$**를 구하여라.**

(풀이)

$$\mathrm{T}(s) = \beta'(s) = (-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c})$$

$$\Longrightarrow \mathrm{T}'(s) = (-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0)$$

$$\Longrightarrow \varkappa(s) = \|\mathrm{T}'(s)\| = \frac{a}{c^2} > 0$$

$$\Longrightarrow \mathrm{N}(s) = \frac{\mathrm{T}'(s)}{\varkappa(s)} = (-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{B}(s) = \mathrm{T}(\mathrm{s}) \times \mathrm{N}(s) = (\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c})$$

$$\Longrightarrow \mathrm{B}'(s) = (\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0)$$

$$\Rightarrow \ \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle = \frac{b}{a^2+b^2} \quad \blacksquare$$

[참고] $b=0$이면 나선은 반지름이 a인 원이므로 반지름이 a인 원의 곡률과 열률은 $\kappa(s)=\dfrac{1}{a}$, $\tau(s)=0$ 임을 알 수 있다.

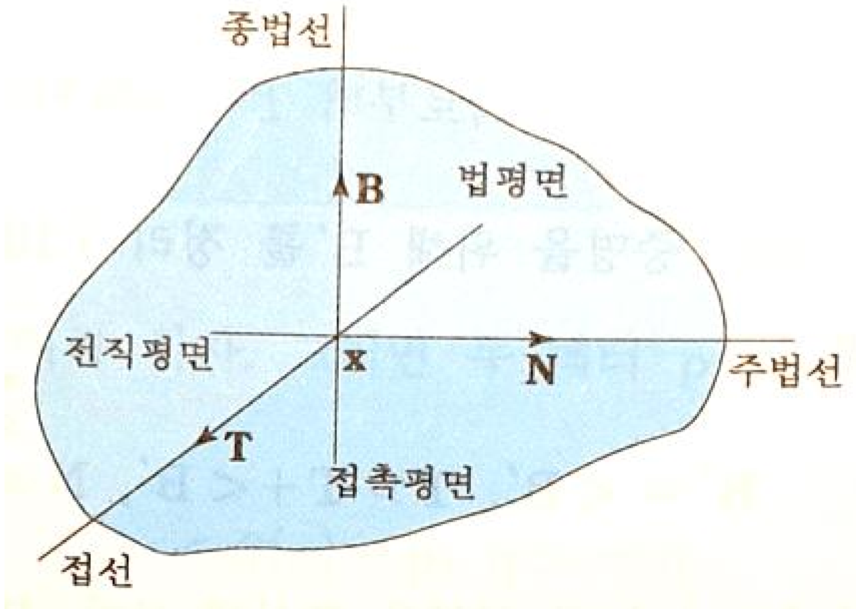
[정의] 공간 곡선 α에 대하여, 곡선위의 점 $\alpha(a)$를 지나면서,

(1) 접벡터 T를 법벡터로 하는 평면을 법평면(Normal Plane)

(2) 단위주법벡터 N를 법벡터로 하는 평면을 전직평면(Rectifying Plane)

(3) 단위종법벡터 B를 법벡터로 하는 평면을 접촉평면(Osculating Plane)

이라고 한다.



[참고] 정칙곡선 $\alpha(s)$ **위의 각 점** x**에서의 직선과 평면의 방정식** y**는 다음과 같이 주어진다.**

접선의 방정식 : $\mathrm{y} = \mathrm{x} + t\mathrm{T},\ \mathrm{t} \in \mathrm{R}$

주법선의 방정식 : $\mathrm{y} = \mathrm{x} + t\mathrm{N},\ \mathrm{t} \in \mathrm{R}$

종법선의 방정식 : $\mathrm{y} = \mathrm{x} + t\mathrm{B},\ \mathrm{t} \in \mathrm{R}$

법평면의 방정식 : $< \mathrm{y} - \mathrm{x}, \mathrm{T} > \ = 0$

전직평면의 방정식 : $< \mathrm{y} - \mathrm{x}, \mathrm{N} > \ = 0$

접촉평면의 방정식 : $< \mathrm{y} - \mathrm{x}, \mathrm{B} > \ = 0$

[예제] 정칙곡선 $\alpha(t) = (t,\ t^2,\ t^3)$**의** $t = 1$**에서의 접선의 방정식과 법평면의 방정식을 구하여라.**

(풀이)

$t = 1$**에서의** $\alpha(t)$**의 접선의 방정식** x**는**

$$\mathrm{x} = \alpha(1) + t\ \alpha'(1),\ \ t \in \mathrm{R}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{x} &= (1,1^2,1^3) + t\ (1,2(1),3(1)^2) \\ &= (1+t,\ 1+2t,\ 1+3t),\ \ t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

$t=1$ 에서의 $\alpha(t)$ 의 법평면의 방정식 x 는

$$< \mathrm{x} - \alpha(1), \alpha'(1) > \ = 0$$

$$< (x_1,x_2,x_3) - (1,1,1),\ (1,2,3) >= 0$$

$$(x_1-1) + 2\,(x_2-1) + 3(x_3-1) = 0$$

$$x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 = 6$$

■

[정리] (Frenet-Serret 정리)

단위속력곡선 $\beta : I \to \mathrm{E}^3$ 의 곡률 $\varkappa(>0)$ 와 열률 τ 에 대하여, 다음 방정식이 성립한다.

(1) $\mathrm{T}' = \varkappa \mathrm{N}$

(2) $\mathrm{N}' = -\varkappa\,\mathrm{T} + \tau \mathrm{B}$

(3) $\mathrm{B}' = -\tau \mathrm{N}$

(증명)

(1) $\mathrm{N}(s)=\mathrm{T}'(s)/\varkappa(s)$ **이므로** $\mathrm{T}' = \varkappa\,\mathrm{N}$ **이다.**

(2) $\{\mathrm{T},\mathrm{N},\mathrm{B}\}$**가 정규 직교 기저이므로**

$$\mathrm{N}' = <\mathrm{N}',\mathrm{T}>\mathrm{T} + <\mathrm{N}',\mathrm{N}>\mathrm{N} + <\mathrm{N}',\mathrm{B}>\mathrm{B}$$

a) $<\mathrm{N},\mathrm{T}>=0$ **를 미분하면** $<\mathrm{N}',\mathrm{T}> \ = -<\mathrm{N},\mathrm{T}'> \ = -\varkappa$

b) $<\mathrm{N},\mathrm{N}>=1$ **를 미분하면** $<\mathrm{N}',\mathrm{N}>=0$

c) $<\mathrm{N},\mathrm{B}>=0$ **를 미분하면** $<\mathrm{N}',\mathrm{B}> \ = -<\mathrm{N},\mathrm{B}'> \ = \tau$

그러므로

$$\mathrm{N}' = -\varkappa\mathrm{T} + \tau\mathrm{B}$$

(3) $\{\mathrm{T},\mathrm{N},\mathrm{B}\}$**가 정규 직교 기저이므로**

$$\mathrm{B}' = <\mathrm{B}',\mathrm{T}>\mathrm{T} + <\mathrm{B}',\mathrm{N}>\mathrm{N} + <\mathrm{B}',\mathrm{B}>\mathrm{B}$$

a) $<\mathrm{B},\mathrm{T}>= 0$**를 미분하면**

$$<\mathrm{B}',\mathrm{T}> + <\mathrm{B},\mathrm{T}'> = 0$$

$$
\begin{aligned}
< B', T > &= - < B, T' > \\
&= - < B, \varkappa N > \quad \textbf{by (1)} \\
&= - \varkappa < B, N > = 0
\end{aligned}
$$

b) $\tau = - < B', N >$ **이므로** $< B', N > = - \tau$

c) $< B, B > = 1$**를 미분하면** $< B', B > = 0$

그러므로

$$
\begin{aligned}
B' &= 0\,T - \tau N + 0\,B \\
&= - \tau N \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

[참고] Frenet-Serret 정리는

$$
\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}
$$

로 표현되고 이 때 계수행렬 A**은 반대칭행렬이다. 즉** $A^T = - A$ **.**

[정리] 곡률 $\kappa > 0$ 인 단위속력곡선 β에 대하여,

$$\beta \text{는 평면곡선} \Leftrightarrow \tau = 0$$

($\Rightarrow$) β가 평면곡선

$\Rightarrow \exists\, \mathrm{p},\mathrm{q}(\neq 0) : < \beta(s) - \mathrm{p}, \mathrm{q} > = 0,\ ^{\forall} s$

$\Rightarrow\ < \beta'(s),\ \mathrm{q} > = 0$ **by 미분**

$< \beta''(s),\ q > = 0$ **by 또 미분**

$\Rightarrow \mathrm{q} \perp \mathrm{T},\ \mathrm{q} \perp \mathrm{N}$ **since** $\mathrm{T} = \beta',\ \mathrm{N} = \beta''/\kappa$

$\Rightarrow \mathrm{B} = \mathrm{q}/\|\mathrm{q}\|$ **since ((**$\mathrm{B} \perp \mathrm{T},\ \mathrm{B} \perp \mathrm{N}$**)** $\Rightarrow \mathrm{B}//\mathrm{q}$ **)**

$\Rightarrow \mathrm{B}' = 0$ **since (** q **가 상수)**

$\Rightarrow \tau = 0,\ ^{\forall} s$ **, since (** $\tau = - < \mathrm{B}', \mathrm{N} >$ **)**

($\Leftarrow$) $\tau = 0,\ \forall s$

$\Rightarrow \mathrm{B}'(\mathrm{s}) = 0,\ ^{\forall}\mathrm{s}$ **since (** $\mathrm{B}' = -\tau \mathrm{N}$ **by Frenet)**

$\Rightarrow \mathrm{B}(\mathrm{s}) \equiv \mathrm{B} =$ **상수** $,\ ^{\forall} s$

함수 $f(s) \overset{\text{정의}}{=} <\beta(s)-\beta(0), \mathrm{B}>$, $^\forall s$

$\Longrightarrow$ $f'(s) =<\beta'(s),\mathrm{B}>$ **by 미분**

$=<\mathrm{T}(s),\mathrm{B}>=0,\ ^\forall s$

$\Longrightarrow$ $f(s) =$ **상수**$=0$, $^\forall s$

$\Longrightarrow$ $<\beta(s)-\beta(0), \mathrm{B}>=f(s)=0$, $^\forall s$ **, since** $f(0)=0$

$\Longrightarrow$ $\beta(s)$**는 상수벡터** B**에 수직한 평면위에 놓여 있다.**

$\Longrightarrow$ $\beta(s)$**는 평면곡선** ■

[정리] 단위속력곡선 β**에서 곡률** $\kappa>0$**, 열률** $\tau=0$**이면,** β**는 반지름의 길이가** $1/\kappa$**인 원의 일부이다.**

(증명)

$\tau=0$**이면** β**는 평면곡선이다. by 앞 정리.**

함수 $\gamma(s) = \beta(s) + \dfrac{1}{\varkappa(s)} \mathrm{N}(s), \ ^{\forall} s$

$\Longrightarrow \ \gamma' = \beta' + (1/\varkappa)\mathrm{N}'$ **by 미분**

$$= \mathrm{T} + \frac{1}{\varkappa}(-\varkappa \mathrm{T}) = 0$$

$\Longrightarrow \ \exists\, \mathrm{c}$ **상수 :** $\gamma(s) \equiv \mathrm{c}, \ ^{\forall} s$

$\Longrightarrow \ \mathrm{c} = \beta(s) + \dfrac{1}{\varkappa(s)} \mathrm{N}(s), \ ^{\forall} s$

$\Longrightarrow$ c **는 접촉평면에 속하고,**

$$\|\mathrm{c} - \beta(s)\| = \left\|\frac{1}{\varkappa(s)} \mathrm{N}(s)\right\| = \frac{1}{\varkappa}$$

$\Longrightarrow \ \beta(s)$ **는 중심이** c **이고 반지름이** $1/\varkappa$ **인 원의 일부** ■

[참고]

(1) 반지름의 길이가 a **인 원의 곡률과 열률은 각각** $\varkappa(s) = 1/a$**,**
$\tau(s) = 0$ **이다. 즉 위 정리의 역도 성립한다.**

(2) $\varkappa \equiv 0 \Leftrightarrow$ **곡선** β**가 직선**
그러므로 곡률 $\varkappa$**는 곡선의 굽은 양을 나타낸다.**

(3) $\tau \equiv 0 \Leftrightarrow$ **곡선** β**가 평면곡선**
그러므로 열률 τ**는 공간속에서 곡선의 비틀림을 나타낸다.**

(숙제) 곡선 $\beta(s) = \left(\frac{5}{13}\cos(s), \frac{8}{13} - \sin(s), -\frac{12}{13}\cos(s)\right)$**는 단위속력 곡선임을 보이고,** $\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B}, \varkappa, \tau$**를 구하여라.**

2.3 자연방정식

[정리] **정칙곡선은 호장의 함수인 곡률과 열률에 의하여 공간 상의 위치를 제외하고는 오직 하나로 결정된다.**

[증명]

두 정칙곡선 C **와** C^* **가**

$$\begin{aligned} \varkappa(s) &= \varkappa^*(s), \ {}^{\forall}s \\ \tau(s) &= \tau^*(s), \ {}^{\forall}s \end{aligned} \quad \text{--(1)}$$

를 만족한다고 하자. C **와** C^* **의 호장에 의한 재매개화를 각각** $\beta(s), \beta^*(s)$ **라고 하자.** C^* **를 한 점** $s = s_0$ **에서** C**와 일치 하도록 평행이동 시키고,** s_0 **에서** $\{\mathrm{T}_0, \mathrm{N}_0, \mathrm{B}_0\}$ **와** $\{\mathrm{T}_0{}^*, \mathrm{N}_0{}^*, \mathrm{B}_0{}^*\}$ **가 일치 하도록** C^* **를 회전이동 시킨다. Frenet-Serret 정리와 식(1)을 이용하여**

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} < \mathrm{T}, \mathrm{T}^* > \ &= \ < \varkappa \mathrm{N}, \mathrm{T}^* > + < \mathrm{T}, \varkappa^* \mathrm{N}^* > \\ &= \varkappa(< \mathrm{N}, \mathrm{T}^* > + < \mathrm{T}, \mathrm{N}^* >) \ \textbf{since} \ \varkappa = \varkappa^* \end{aligned}$$

$$\frac{d}{ds}< \mathrm{N,N^*} > \; = \; <-\varkappa\mathrm{T}+\tau\mathrm{B},\mathrm{N^*}>+<\mathrm{N},-\varkappa^*\mathrm{T^*}+\tau^*\mathrm{B^*}>$$

$$= \; -\varkappa(<\mathrm{T,N^*}>+<\mathrm{N,T^*}>)$$

$$+\tau(<\mathrm{B,N^*}>+<\mathrm{N,B^*}>) \quad \textbf{since} \quad \varkappa=\varkappa^*,\tau=\tau^*$$

$$\frac{d}{ds}< \mathrm{B,B^*} > \; = \; <-\tau\mathrm{N},\mathrm{B^*}>+<\mathrm{B},-\tau^*\mathrm{N^*}>$$

$$= \; -\tau(<\mathrm{N,B^*}>+<\mathrm{B,N^*}> \quad \textbf{since} \quad \tau=\tau^*$$

위 세 식을 모두 합하면

$$\frac{d}{ds}(<\mathrm{T,T^*}>+<\mathrm{N,N^*}>+<\mathrm{B,B^*}>)=0$$

위를 s**에 관하여 적분하면,**

$$<\mathrm{T,T^*}>+<\mathrm{N,N^*}>+<\mathrm{B,B^*}> \; = \; \textbf{상수}$$

이다. 점 s_0**에서는** $\mathrm{T_0}=\mathrm{T_0}^*, \mathrm{N_0}=\mathrm{N_0}^*, \mathrm{B_0}=\mathrm{B_0}^*$ **이므로 위 상수는** 3 **이어야 한다. 그런데** $<\mathrm{T,T^*}>\le 1,\; <\mathrm{N,N^*}>\le 1,\; <\mathrm{B,B^*}>\le 1$

이므로

$$< \mathrm{T}, \mathrm{T}^* > \;=\; < \mathrm{N}, \mathrm{N}^* > \;=\; < \mathrm{B}, \mathrm{B}^* > = 1$$

따라서 모든 s**에 대하여**

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}^*,\ \mathrm{N} = \mathrm{N}^*,\ \mathrm{B} = \mathrm{B}^*$$

이고, $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$ **를** s**에 관하여 적분하면,**

$$\beta(s) = \beta^*(s) + c,\ c \text{ 는 상수}$$

점 s_0**에서** $\beta(s_0) = \beta^*(s_0)$**이므로** $c = 0$ **이다. 따라서**

$$\beta(s) = \beta^*(s),\ {}^\forall s$$

즉 두 곡선 C**와** C^***는 평행이동과 회전이동을 통하여 포개어 놓을 수 있다.** ■

[정의] 호장 s**로 표현되는 곡선의 곡률** $\varkappa = \varkappa(s)$**과 열률** $\tau = \tau(s)$**을 곡선의 자연방정식(natural equation) 또는 본질방정식(intrinsic equation)라고 한다.**

[예제]

(1) 직선의 방정식은 $\varkappa(s)=0, \tau(s)=0$ **이다.**

(2) 반지름 $1/\varkappa$ **인 원의 방정식은** $\varkappa(s)=$ **상수**$(\neq 0), \tau(s)=0$ **이다.**

(3) 나선의 방정식은 $\varkappa(s)=$**상수**$(\neq 0), \tau(s)=$**상수**$(\neq 0)$ **이다.**

주어진 상수 $\varkappa, \tau$ **로부터 나선의 방정식 (주의 : 교재에 오류 있음)**

$$\beta(s)=\left(\frac{\varkappa}{\delta^2}\cos(\delta s), \frac{\varkappa}{\delta^2}\sin(\delta s), \frac{\tau}{\delta}s\right), \ \delta=\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}$$

이 얻어진다. 왜냐하면, 이전에 주어진 나선 방정식 $\beta(s)$ **와** $\varkappa, \tau$ **는**

$$\beta(s)=\left(a\cos\left(\frac{s}{c}\right), a\sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c}s\right), \ c=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\varkappa=\frac{a}{a^2+b^2}, \tau=\frac{b}{a^2+b^2}$$

이었다. 그러므로

$$\beta(s)=\left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ \cdots\ \sin(\cdots)\ ,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}s\right)$$

$$\varkappa^2+\tau^2=\frac{1}{a^2+b^2},\quad \varkappa=a(\varkappa^2+\tau^2),\ \tau=b(\varkappa^2+\tau^2)$$

이 되고,

$$\beta(s)=\left(\frac{\varkappa}{\varkappa^2+\tau^2}\cos(\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}\,s),\ \cdots\ \sin(\cdots)\ ,\ \frac{\tau}{\varkappa^2+\tau^2}\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}\,s\right)$$

$$=\left(\frac{\varkappa}{\varkappa^2+\tau^2}\cos(\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}\,s),\ \cdots\ \sin(\cdots)\ ,\ \frac{\tau}{\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}}s\right)$$

$$=\left(\frac{\varkappa}{\delta^2}\cos(\delta s),\frac{\varkappa}{\delta^2}\sin(\delta s),\frac{\tau}{\delta}s\right),\ \delta=\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}$$

이 된다. ■

2.4 임의속력곡선

호장에 의한 재매개화를 구하려면 적분하고 역함수를 구해야 하는데 어렵거나 불가능할 수가 있다. 따라서 단위속력곡선이 아닌 임의속력곡선에 대한 $\mathrm{T},\mathrm{N},\mathrm{B},\varkappa,\tau$ **를 직접 구해보자.**

[정리] $\alpha(t)$ **가 정칙인 공간곡선일 때, 다음이 성립한다.**

$$\mathrm{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|},\ \mathrm{N} = \mathrm{B} \times \mathrm{T},\ \mathrm{B} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

$$\varkappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}\ ,\ \tau = \frac{< \alpha' \times \alpha'', \alpha''' >}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

(증명) T **는** α' **방향의 단위벡터이므로** $\mathrm{T} = \dfrac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$ **이다.** $\mathrm{B} = \mathrm{T} \times \mathrm{N}$ **이므로** $\mathrm{N} = \mathrm{B} \times \mathrm{T}$ **이다. 속도를** $v = \|\alpha'\|\,(>0)$ **로 놓으면,** $\alpha' = v\mathrm{T}$ **이고,**

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{dv}{dt}\mathrm{T} + v\frac{d\mathrm{T}}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt}\mathrm{T} + v\frac{ds}{dt}\ \mathrm{T}'(s) \\ &= \frac{dv}{dt}\mathrm{T} + v^2\ \varkappa\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

이므로 $$\begin{aligned}\alpha' \times \alpha'' &= (v\mathrm{T}) \times \left(\frac{dv}{dt}\mathrm{T} + v^2\,\varkappa\mathrm{N}\right) \\ &= v\frac{dv}{dt}(\mathrm{T}\times\mathrm{T}) + \varkappa v^3(\mathrm{T}\times\mathrm{N}) \\ &= 0 + \varkappa v^3\mathrm{B} = \varkappa v^3\mathrm{B}\end{aligned}$$

이 된다. 그러므로 $\|\alpha' \times \alpha''\| = |\varkappa v^3|\,\|\mathrm{B}\| = \varkappa v^3$ 이다. $\varkappa = 0$의 경우에는 직선이 되고, $\alpha' \times \alpha'' = 0$이 되어 자명하므로, $\varkappa \neq 0$을 가정하면,

$$\mathrm{B} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\varkappa v^3} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

$$\varkappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{v^3} = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

을 얻는다. 한편, 위에서 얻은 $\alpha'' = \dfrac{dv}{dt}\mathrm{T} + \varkappa v^2\mathrm{N}$ 을 한번 더 미분하여,

$$\begin{aligned}\alpha''' &= \frac{dv^2}{dt^2}\mathrm{T} + \frac{dv}{dt}\,\frac{d\mathrm{T}}{dt} + \frac{d}{dt}(\varkappa v^2)\mathrm{N} + \varkappa v^2\frac{d\mathrm{N}}{dt} \\ &= \frac{dv^2}{dt^2}\mathrm{T} + \frac{dv}{dt}\,\frac{ds}{dt}\,\frac{d\mathrm{T}}{ds} + \frac{d}{dt}(\varkappa v^2)\mathrm{N} + \varkappa v^2\frac{ds}{dt}\,\frac{d\mathrm{N}}{ds} \\ &= \frac{dv^2}{dt^2}\mathrm{T} + \frac{dv}{dt}\,\frac{ds}{dt}(\varkappa\mathrm{N}) + \frac{d}{dt}(\varkappa v^2)\mathrm{N} + \varkappa v^2 v(-\varkappa\mathrm{T} + \tau\mathrm{B}) \\ &= (\ldots)\mathrm{T} + (\ldots)\mathrm{N} + (\varkappa v^3\tau)\mathrm{B}\end{aligned}$$

을 얻는다. $\alpha' \times \alpha'' = \varkappa v^3\mathrm{B}$ **과 위의** α''' **내적하면,**

$$\begin{aligned}<\alpha' \times \alpha'', \alpha'''> &= <\varkappa v^3\mathrm{B},\ (\ldots)\mathrm{T} + (\ldots)\mathrm{N} + (\varkappa v^3\tau)\mathrm{B}> \\ &= (\varkappa v^3)^2\tau \\ &= \|\alpha' \times \alpha''\|^2\,\tau\end{aligned}$$

이므로 열률 공식 $\tau = \dfrac{<\alpha' \times \alpha'', \alpha'''>}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$ **를 얻는다.** ■

[예제] $a\,(>0)$ **가 상수일 때, 현수선** $\alpha(t) = (a\cosh(t/a), t, 0)$ **의 자연방정식을 구하라. (이 경우에는 호장 매개변수로 구하는 것보다, 임의속력곡선의 공식으로 구하는 것이 더 쉽다.)**

(풀이)

(i) $\alpha'(t) = (\sinh(t/a), 1, 0)$**이므로**

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sinh^2(t/a) + 1} = \cosh(t/a)$$

이다. 또 $\alpha''(t) = (1/a\cosh(t/a), 0, 0)$ **로부터**

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (0, 0, -(1/a)\cosh(t/a))$$

이므로 곡률은

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{1}{a\cosh^2(t/a)} \quad \text{--- (1)}$$

자연방정식은 호장을 매개변수로 가지므로, 호장을 구하면,

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\|du = \int_0^t \cosh(u/a)du = a\sinh(t/a)$$

을 얻고, 곡률의 분모가 될 부분

$$s^2+a^2=a^2\sinh^2(t/a)+a^2=a^2\cosh^2(t/a)$$

을 계산하여 (1)식에 대입하면 곡률

$$\varkappa=\frac{a}{s^2+a^2}$$

을 얻는다. 한편, $\alpha(t)$ 는 평면곡선이므로 열률은 $\tau(t)=0,\ ^{\forall}t$ 이다.
따라서 현수선의 자연방정식은

$$\varkappa(s)=\frac{a}{s^2+a^2}\ ,\ \tau(s)=0$$

이다. ■

[예제] 곡선 $\alpha(t)=(1+t^2,t,t^3)$의 $\mathrm{T},\mathrm{N},\mathrm{B},\varkappa,\tau$ 를 구하라.
(풀이) 다음페이지에

(풀이)

$$\alpha'(t) = (2t, 1, 3t^2),\ \alpha''(t) = (2, 0, 6t),\ \alpha'''(t) = (0, 0, 6)$$

이므로

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (6t, -6t^2, -2)$$

$$< \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) > = -12$$

이다. 그러므로

$$\mathrm{T} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(2t, 1, 3t^2)}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$$

$$\mathrm{B} = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} = \frac{(3t, -3t^2, -1)}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}}$$

$$\mathrm{N} = \mathrm{B} \times \mathrm{T} = \frac{(1-9t^4,\ -2t-9t^3, 3t+6t^3)}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}\sqrt{1+9t^2+9t^4}}$$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{4+36t^2+36t^4}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}},\ \tau = \frac{-12}{4+36t^2+36t^4} \qquad \blacksquare$$

[예제] 곡선 $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ **의** $\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B}, \varkappa, \tau$ **를 구하라.**

(풀이)

$$\alpha'(t) = 3(1-t^2, 2t, 1+t^2),\ \alpha''(t) = 6(-t, 1, t),$$

$$\alpha'''(t) = 6(-1, 0, 1)$$

이므로

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{18}(1+t^2)$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = 18(-1+t^2, -2t, 1+t^2)$$

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = 18\sqrt{2}(1+t^2)$$

$$<\alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t)> = 6 \cdot 18 \cdot 2 = 216$$

이다. 그러므로

$$\mathrm{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{(1-t^2,\, 2t,\, 1+t^2)}{\sqrt{2}\,(1+t^2)}$$

$$\mathrm{B} = \frac{\alpha'(t)\times\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|} = \frac{(-1+t^2,\, -2t,\, 1+t^2)}{\sqrt{2}\,(1+t^2)}$$

$$\mathrm{N} = \mathrm{B}\times\mathrm{T} = \frac{(-2t,\, 1-t^2, 0)}{1+t^2}$$

$$\varkappa = \tau = \frac{1}{3(1+t^2)^2} \qquad \blacksquare$$

[숙제] 곡선 $\alpha(t) = (t-\cos(t), \sin(t), t)$**의** $\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B}, \varkappa, \tau$ **를 구하라.**

2.5 곡률과 열률의 관계

주어진 곡선 β로부터 새로운 곡선 γ를 만들고, γ의 성질을 조사함으로 원래의 곡선 β의 성질을 알아 보자.

[정의] 주어진 곡선 β위의 한 단위벡터장이 만드는 반지름의 길이가 1인 구면 위의 곡선 γ를 주어진 단위벡터장의 **구면곡선**(sperical curve)라 한다.

(주의) 구면곡선 γ는 일반적으로 단위속력곡선이 되지는 않는다.

왜냐하면, 예를 들어, $\gamma(s) = \mathrm{T}(s)$일 때,

$$\|\gamma'(s)\| = \|\mathrm{T}'(\mathrm{s})\| = \|\varkappa(\mathrm{s})\mathrm{N}(\mathrm{s})\| = \varkappa(\mathrm{s})$$

이기 때문이다. 그런데 만약 $\varkappa(s) \equiv 1$ 이라면 γ가 단위속력곡선이 된다.

[예제] 단위속력 나선

$$\beta(s)=\left(a\cos(\frac{s}{c}),a\sin(\frac{s}{c}),\frac{b}{c}s)\right),\ c=\sqrt{a^2+b^2},\ a>0,\ b>0$$

에 대하여,

$$\gamma(s)=\mathrm{T}(s)=\left(-\frac{a}{c}\sin(\frac{s}{c}),\frac{a}{c}\cos(\frac{s}{c}),\frac{b}{c}\right)$$

는 β**위에 있는 단위접벡터장** T**에 대한 구면곡선이다. 이 곡선은 평면** $z=\dfrac{b}{c}$**위에 있는 반지름의 길이** $\dfrac{a}{c}$**인 원의 일부를 나타낸다.**

[정리] $\varkappa>0$**인 정칙곡선** β**의 단위접벡터장** T**의 구면곡선** γ**의 곡률을** $\varkappa_\gamma$**라하면 다음이 성립한다.**

$$\varkappa_\gamma{}^2=1+\left(\frac{\tau}{\varkappa}\right)^2$$

(증명) $\gamma = \mathrm{T}$ **로 정의 되므로,**

$$\begin{aligned}\gamma' &= \mathrm{T}' = \varkappa \mathrm{N} \\ \gamma'' &= \frac{d\varkappa}{ds}\mathrm{N} + \varkappa \mathrm{N}' \\ &= \frac{d\varkappa}{ds}\mathrm{N} + \varkappa(-\varkappa \mathrm{T} + \tau \mathrm{B})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma' \times \gamma'' &= \varkappa \mathrm{N} \times \left(-\varkappa^2 \mathrm{T} + \frac{d\varkappa}{ds}\mathrm{N} + \varkappa\tau \mathrm{B}\right) \\ &= -\varkappa^3(\mathrm{N} \times \mathrm{T}) + \varkappa^2\tau(\mathrm{N} \times \mathrm{B}) \\ &= \varkappa^3(\mathrm{B}) + \varkappa^2\tau(\mathrm{T})\end{aligned}$$

임의속력곡선 γ**의 곡률** $\varkappa_\gamma$ **은 다음과 같다.**

$$\varkappa_\gamma = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{\varkappa^2\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}}{\varkappa^3} = \frac{\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}}{\varkappa} = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\varkappa}\right)^2} \quad \blacksquare$$

[정리] 중심이 원점에 있고 반지름의 길이가 a인 구면 위에 있는 단위속력 곡선 $\beta(s)$의 곡률 $\varkappa$는 $\varkappa \geq (1/a)$이다.

(증명)

$\|\beta(s)\| = a$ **이므로** $<\beta(s), \beta(s)> = a^2$ **이고, 양변을 미분하면,**

$$2 < \beta'(s), \beta(s) > = 0$$

$$< \mathrm{T}(\mathrm{s}), \beta(\mathrm{s}) > = 0$$

또 미분하여,

$$< \mathrm{T}'(\mathrm{s}), \beta(\mathrm{s}) > + < \mathrm{T}(\mathrm{s}), \beta'(\mathrm{s}) > = 0$$

$$< \varkappa \mathrm{N}(\mathrm{s}), \beta(\mathrm{s}) > + < \mathrm{T}(\mathrm{s}), \mathrm{T}(\mathrm{s}) > = 0$$

$$\varkappa < \mathrm{N}(\mathrm{s}), \beta(\mathrm{s}) > = -1$$

양변에 절대값을 취하면, 코시슈바르츠 부등식에 의하여,

$$1 \leq \varkappa(s) \, | < \mathrm{N}(s), \beta(s) > | \leq \varkappa(s) \|\mathrm{N}(s)\| \, \|\beta(s)\| = \varkappa(s) a$$

이 되므로, $\varkappa(s) \geq \dfrac{1}{a}$ **이다.** ■

(주목) $\kappa = 1/a$ 인 경우는 β가 구면위의 대원일 때이고, 대원이 아닌 경우는 곡률이 $1/a$ 보다 크다는 것을 알 수있다.

[정의] 3차원 공간안의 정칙곡선 α의 단위접벡터장 T가 어떤 상수 단위벡터 u와 항상 일정한 각 θ를 이룰 때, 즉 $<\mathrm{T}, u> = \cos\theta =$ 상수일 때 곡선 α를 **주면나선**(cylindrical helix)이라고 한다. 이때 u는 주면나선의 **축**(axis), θ는 **경사도**(pitch)라 한다.

[정리] 곡률 $\kappa > 0$ 인 정칙곡선 α에 대하여,

$$\alpha\text{가 주면나선} \Leftrightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \text{상수}$$

(증명)

곡선의 모양은 속력과 무관하므로, α를 단위속력곡선이라고 가정해도 좋다.

($\Longrightarrow$)

α **가 주면나선**

$\Longrightarrow \exists$ **상수 단위벡터** u **:** $< \mathrm{T}, u >=$ **상수**

$\Longrightarrow \ < \mathrm{T}', u >= 0 \ \Longrightarrow \ \varkappa < \mathrm{N}, u >= 0$

$\Longrightarrow \ < \mathrm{N}, u >= 0 \ \Longrightarrow \ \mathrm{N} \perp u$

$\Longrightarrow \ \exists$ **상수** θ **:** $u = \cos(\theta)\mathrm{T} + \sin(\theta)\mathrm{B}$

$\Longrightarrow \ 0 = \cos(\theta)(\varkappa \mathrm{N}) + \sin(\theta)(-\tau \mathrm{N})$ **by 양변미분**

$\Longrightarrow \ 0 = \varkappa \cos(\theta) - \tau \sin(\theta)$

$\Longrightarrow \ \dfrac{\tau}{\varkappa} = \cot(\theta) =$ **상수**

($\Longleftarrow$)

$\dfrac{\tau}{\varkappa} =$ **상수** $\Longrightarrow \ \exists$ **상수** θ **:** $\dfrac{\tau}{\varkappa} = \cot(\theta)$

$\Longrightarrow\ 0 = \varkappa \cos(\theta) - \tau \sin(\theta)$

$\Longrightarrow\ 0 = [\cos(\theta)(\varkappa) + \sin(\theta)(-\tau)]\,\mathrm{N}$

$\Longrightarrow\ 0 = \cos(\theta)(\varkappa\mathrm{N}) + \sin(\theta)(-\tau\mathrm{N})$

$\Longrightarrow \exists$ **상수벡터** u : $u = \cos(\theta)\mathrm{T} + \sin(\theta)\mathrm{B}$ **by 양변적분**

$\Longrightarrow\ < \mathrm{T}, u > = \cos(\theta)$

$\Longrightarrow\ < \mathrm{T}, u > =$ **상수**

$\Longrightarrow\ \alpha$**가 주면나선** ■

[예제] 곡선 $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$**는 이전 예제에서 임의속력곡선 공식을 사용하여** $\varkappa = \tau$ **을 보였다. 따라서** α**는** $\tau/\varkappa = 1$**인 주면나선 곡선이다. 이 경우, 주면나선의 경사도** θ**와 축** u**를 구해 보자.**

$$\frac{\tau}{\varkappa} = 1 = \cot(\theta)$$

이므로 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ **이고,** $\cos(\theta) = \sin(\theta) = 1/\sqrt{2}$ **이다. 따라서**

$$u = \cos(\theta)\mathrm{T} + \sin(\theta)\mathrm{B}$$

앞선 예제에서 $t = 0$ **을 대입하면** $\mathrm{T} = (1,0,1)/\sqrt{2}, \mathrm{B} = (-1,0,1)/\sqrt{2}$ **이므로**

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = (0,0,1)$$

따라서, 경사도 θ **와 축** u **은 다음과 같다.**

$$\theta = \frac{\pi}{4}, u = (0,0,1) \qquad \blacksquare$$

[예제] $2b^2 = 3a$ **일 때, 곡선** $\alpha(t) = (at, bt^2, t^3)$ **의 각 점에서 접벡터는 벡터** $\mathrm{a} = (1,0,1)$ **과 일정한 각을 이룸을 보여라.**

(풀이)

$\alpha'(t) = (a, 2bt, 3t^2)$ **이므로** $2b^2 = 3a$ **를 이용하면**

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + 4b^2t^2 + 9t^4} = a + 3t^2$$

이다. 따라서 접벡터 $\alpha'(t)$ 와 벡터 a 사이의 각 θ 의 코사인은

$$\cos(\theta) = \frac{<\alpha'(\mathrm{t}), \mathrm{a}>}{\|\alpha'(t)\|\,\|\mathrm{a}\|} = \frac{a+3t^2}{(a+3t^2)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이므로 접벡터와 벡터 a 사이의 각은 항상 $\pi/4$ 이다 즉 α 는 주면나선 이다. ■

(숙제) $\alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$ **이 주면나선임을 보이고 축과 경사도를 구하라.**

제3장 곡선의 대역적 이론

3.1 평면곡선의 대역적 이론

[정의]

(1) 평면에서 정칙인 단위속력곡선 $\beta(s)$ 에서 $\mathrm{t}(s) = \beta'(s)$ 를 **단위접벡터장**(unit tanget vectro field)라고 한다.

(2) $\{t(s), \mathrm{n}(s)\}$가 우수정규직교기저를 이루는 $\mathrm{n}(s)$ 를 **단위법벡터장**(unit normal vectro field)라고 한다.

(3) $k(s) = < \mathrm{t}'(s), \mathrm{n}(s) >$ 를 **평면곡률**(plane curvature)라고 한다.

(참고)

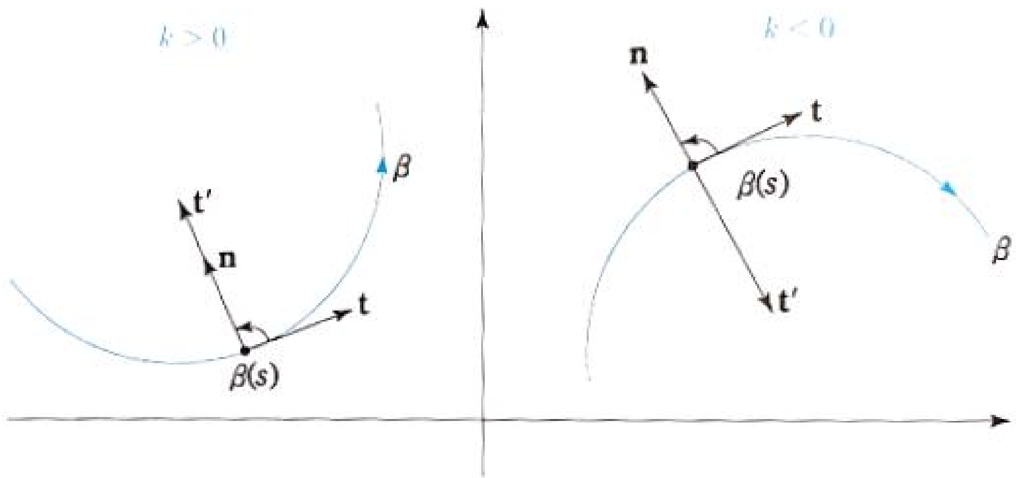
(1) 평면곡률은 공간곡률과 구별하기 위하여 $\varkappa(s)$ 대신 $k(s)$ 를 사용한다.

(2) 단위속력곡선 $\beta(s) = (x(s), y(s))$ 에서 $\mathrm{t}(s) = (x'(s), y'(s))$ 이고 $\mathrm{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$ 이다. 왜냐하면

$$\det\begin{bmatrix} x'(s) & y'(s) \\ -y'(s) & x'(s) \end{bmatrix} = 1 > 0$$

이므로 오른쪽 회전 방향이고, $\|\mathrm{t}\| = \|\mathrm{n}\| = 1$ **이고,** $< \mathrm{t}, \mathrm{n} > = 0$ **이기 때문이다. 즉** $\{t(s), \mathrm{n}(s)\}$**가 우수정규직교기저를 이룬다.**

(3) 공간곡률은 항상 $\varkappa(s) = \|\mathrm{T}'(s)\| \geq 0$ **로 정의했던 것과 달리 평면 곡률을** $k(s) = < \mathrm{t}'(s), \mathrm{n}(s) >$ **은 음의 값을 가질 수 있다. 양수이면 법벡터와** n**과 같은 방향이고 음수이면** n**과 반대방향이다.**



[예제]

(1) $\beta(s)=\left(r\cos(\frac{s}{r}), r\sin(\frac{s}{r})\right)$**는 반시계방향으로 움직이는 반지름이 r인 단위속력을 갖는 원이다. 이 때**

$$\mathrm{t}=\left(-\sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r})\right),\ \ \mathrm{n}=\left(-\cos(\frac{s}{r}),\ -\sin(\frac{s}{r})\right),\ \ k=\frac{1}{r}$$ **이다.**

(2) $\beta(s)=\left(r\cos(\frac{s}{r}),\ -r\sin(\frac{s}{r})\right)$**는 시계방향으로 움직이는 반지름이 r인 단위속력을 갖는 원이다. 이 때**

$$\mathrm{t}=\left(-\sin(\frac{s}{r}),\ -\cos(\frac{s}{r})\right),\ \ \mathrm{n}=\left(\cos(\frac{s}{r}),\ -\sin(\frac{s}{r})\right),\ \ k=-\frac{1}{r}$$

로서 평면곡률 $k(s)$가 음수임에 주목하여라.

[정의] 정칙인 평면곡선 $\alpha(t)$가 주기함수일 때, 즉

$$\exists\, a > 0 : \alpha(t) = \alpha(t+a)$$

이면 α는 **폐곡선**(closed curve)라고 한다. 이 때 상수 a의 최솟값을 α의 **주기**(period)라고 한다.

[정리] $\alpha(t)$가 주기 a를 갖는 폐곡선이고, $\beta(s)$가 α의 호장에 의한 재매개화이면, β도 폐곡선이고 주기는 $\ell = \int_0^a \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| dt$이다.

(증명)

$$s(t+a) = \int_0^{t+a} \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| dt$$

$$= \int_0^{a} \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| dt + \int_a^{t+a} \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| dt$$

$$= \ell + \int_a^{t+a} \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| dt$$

$$= \ell + \int_0^{t} \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| dt$$ **since** α**의 주기가** a

$$= \ell + s(t) = s(t) + \ell$$ **---(1)**

따라서,

$$\beta(s+\ell) = \beta(s(t)+\ell)$$

$$= \beta(s(t+a))$$ **by (1)**

$$= \alpha(t+a)$$

$$= \alpha(t)$$ **since** α**의 주기가** a

$$= \beta(s(t)) = \beta(s)$$

그러므로 β**는 폐곡선이다.** $^{\forall} t, \alpha(t+a) = \alpha(s)$**인 최소의 양수가** a **이므로** $^{\forall} s, \beta(s+\ell) = \beta(s)$**인 최소의 양수도** ℓ**이다.** ■

[정의] 정칙곡선 $\alpha(t)$가 일대일 함수이거나, 주기 a인 폐곡선으로서,

($\alpha(t_1)=\alpha(t_2) \Rightarrow \exists$ 정수 n : $t_1 - t_2 = na$)를 만족하는 곡선 $\alpha(t)$를 **단순곡선**이라고 한다.

(참고)

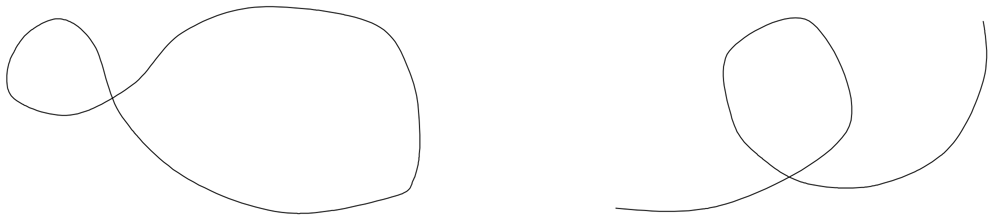
(1) 폐곡선이 아닌 정칙곡선으로 자신과 만나지 않으면 단순곡선이다.

(2) 폐곡선인 정칙곡선으로 주기 a의 정수배에서만 자신과 만나면 단순곡선이다.

[예제]

(1) 원 $\beta(s)=(\cos(s),\sin(s))$, $s\in[0,2\pi]$는 길이가 2π인 단순폐곡선이다.

(2) 다음 그림의 곡선은 단순곡선이 아니다.



[정의] 단위속력 평면곡선 $\beta(s)$가 주기 ℓ인 폐곡선일 때, $\theta(s)$를 $\beta(s)$의 단위접벡터장 $\mathrm{t}(s)$가 x축 양의 방향에서 반시계방향을 (+)으로, 시계방향을 (-)로 회전하는 각이라고 할 때,

$$m = \frac{1}{2\pi}(\theta(\ell) - \theta(0))$$

를 곡선 β의 회전수(rotation index)라고 한다.

[참고] 위에서 β의 회전수는 평면곡률 $k(s)$를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\ell} k(s)ds$$

(증명) 접벡터 $\mathrm{t}(s)$가

$$\mathrm{t}(s) = (\,\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))\,)$$

로 주어지므로, 곡률벡터 $\mathrm{t}'(s)$와 (우수계) 법벡터 $\mathrm{n}(s)$는 각각

$$\mathrm{t}'(s) = (-\sin(\theta(s))\,\theta'(s),\ \cos(\theta(s))\,\theta'(s))$$
$$\mathrm{n}(s) = (\,-\sin(\theta(s)),\ \cos(\theta(s))\,)$$

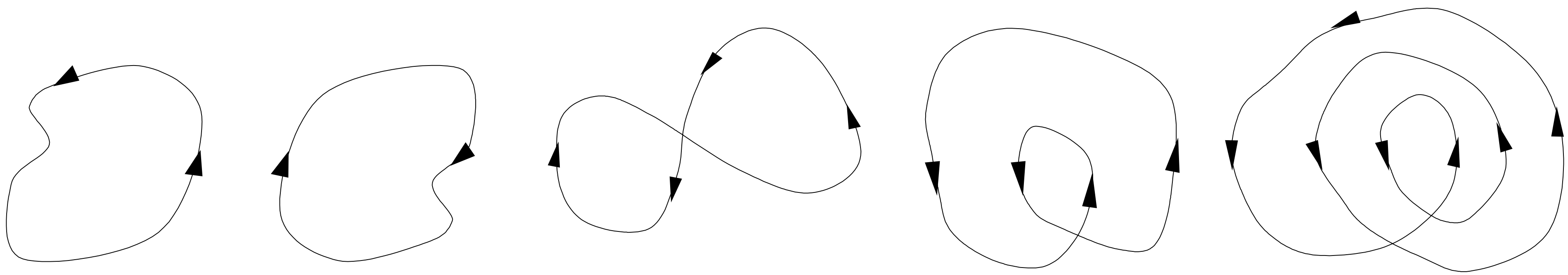
이므로 평면곡률은

$$k(s) = \ <\mathrm{t}'(s), \mathrm{n}(s)> \ = \ \theta'(s)$$

이다. 따라서

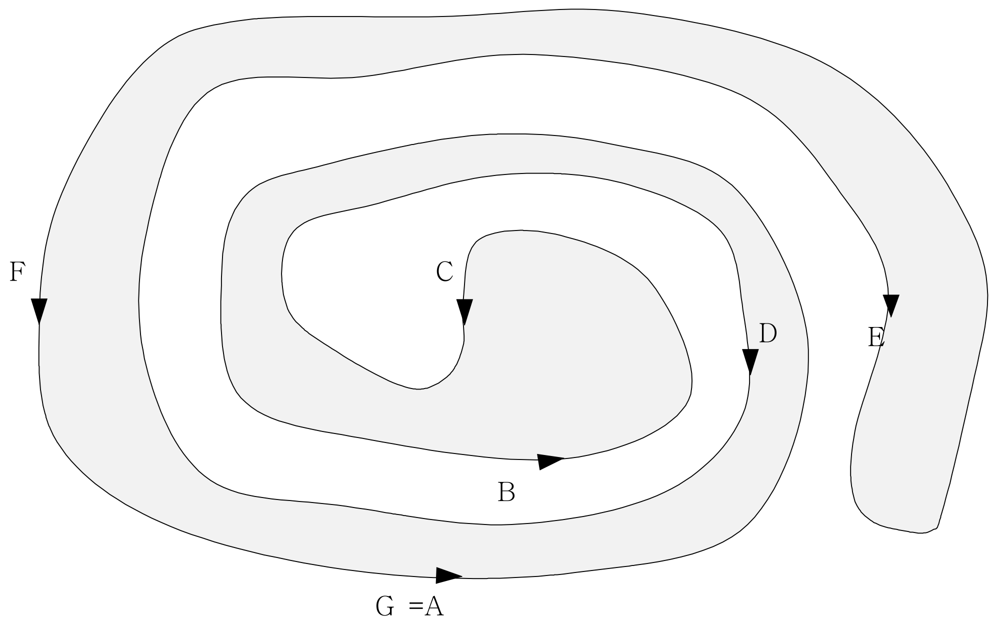
$$m = \frac{1}{2\pi}(\theta(\ell) - \theta(0))$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\ell \theta'(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^\ell k(s)\,ds \qquad \blacksquare$$

[예제] 다음 폐곡선들의 회전수를 구하여라. $1,\ -1,\ 0,\ 2,\ 3$



[정리] 평면위 단순폐곡선의 회전수는 ± 1 이다.

[예제] 다음 곡선의 회전수는 1 임을 보여라.



$A:0$

$B:2\pi$

$C:2\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{7}{2}\pi$

$D:\frac{7}{2}\pi-2\pi=\frac{3}{2}\pi$

$E:\frac{3}{2}\pi-2\pi=-\frac{1}{2}\pi$

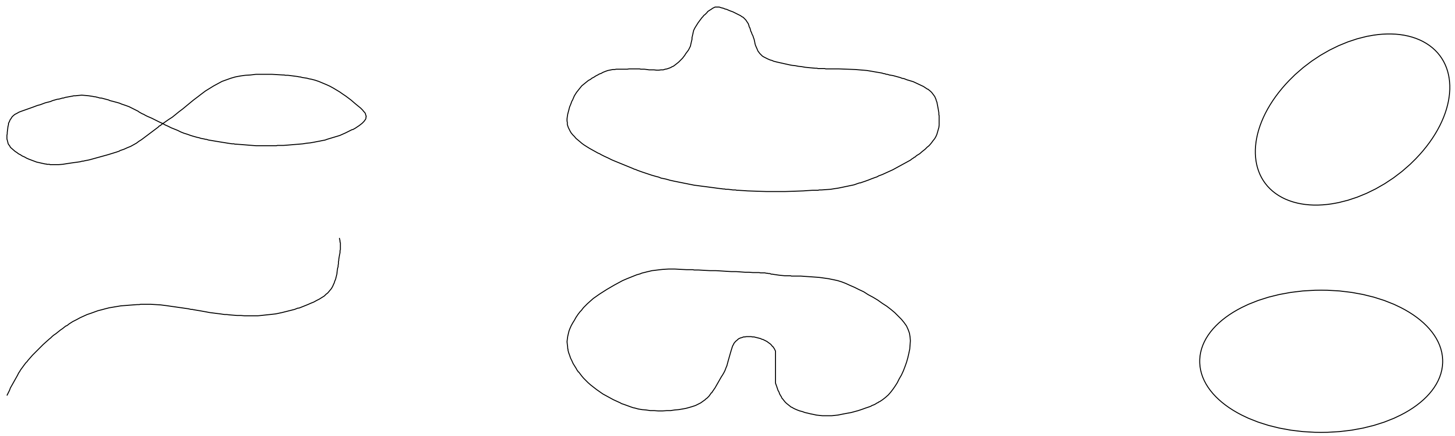
$F:-\frac{1}{2}\pi+2\pi=\frac{3}{2}\pi$

$G:\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi=2\pi$

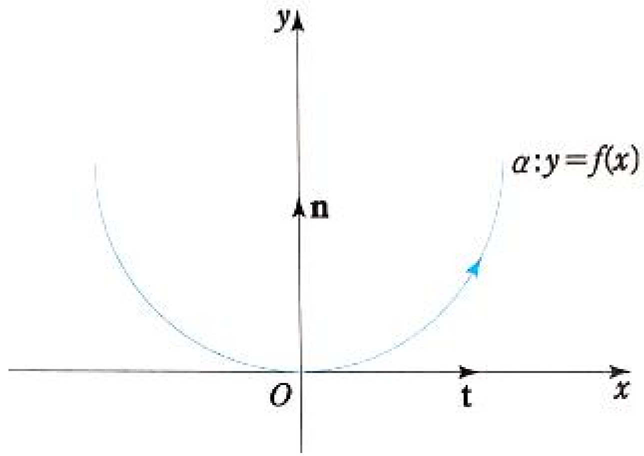
각도 2π 로 회전하였으므로 회전수는 1 이다.

[정의] 평면위의 단순폐곡선 α 위의 임의의 두 점을 연결하는 선분이 α 의 외부에 있지 않을 때, α 를 난형선(oval curve)라고 한다.

[예제] 다음 곡선 중에서 난형선은 어느 것인가?



[참고] 난형선 α 위의 임의의 점을 택하고 그 점에서 접벡터 t 를 x 축으로, 법벡터 n 를 y 축으로 설정하여 α 가 방정식 $y = f(x)$ 로 표시되었다면 각 점에서 $f'' > 0$ 이다.



[정의] 정칙 평면곡선 α에서 평면곡률이 극대 또는 극소가 되는 점을 정점(vertex)라고 한다.

[참고] 평면곡률 k가 미분가능한 함수이면 정점에서는 $k' = 0$이다.

[예제] 곡선 $\alpha(t) = (2\cos(t), \sin(t))$는 타원이다. 이 타원 α는

$$t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$$ **에서만 정점을 갖는다.**

[정리] (4개 정점의 정리) 난형선위에서는 적어도 4개의 정점이 있다.

(증명)

직선 부분이나 원에서는 곡률이 상수이므로 모든 점이 정점이다. 난형선 β는 원이나 직선 부분을 포함하고 있지 않다고 가정하자. 그러면 평면곡률 $k(s)$는 상수가 아닌 연속인 주기함수(주기는 β의 길이인 ℓ)이다. 따라서 $k(s)$가 최대와 최소가 되는 β위의 두 점 A, B가 존재한다. 점 A, B에서 $k'(s) = 0$이므로 A, B는 정점이다.

만약 A, B 외에 정점이 없다고 가정하고, A는 $\beta(0)$, B는 $\beta(a)$로 놓으면,

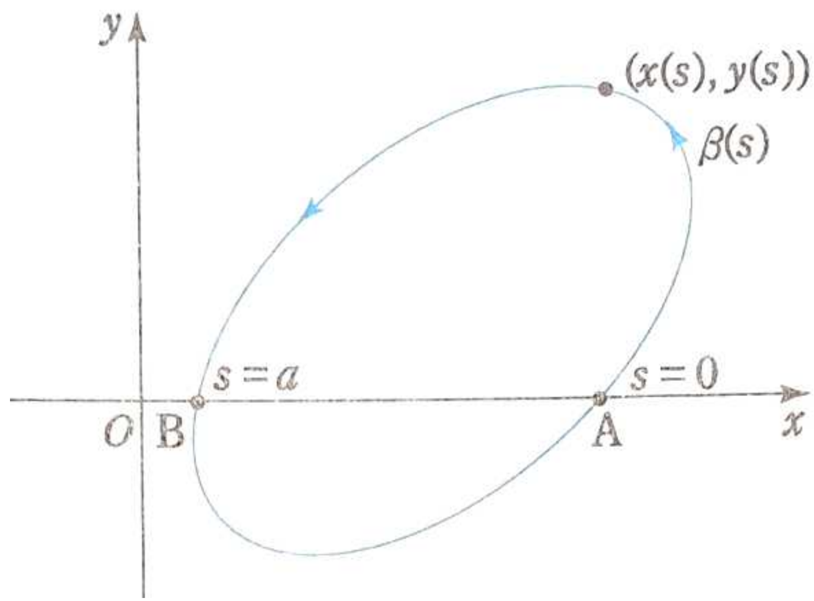
$$k'(s) < 0,\ 0 < s < a$$

$$k'(s) > 0,\ a < s < \ell$$

A와 B를 연결한 직선을 x축으로 하자. 단위속력곡선 β가 $\beta(s) = (x(s),\ y(s))$로 주어졌다고 하면,

$$y(s) > 0,\ 0 < s < a$$

$$y(s) < 0,\ a < s < \ell$$



이므로

$$k'(s)\,y(s) < 0,\ 0 < s < \ell, s \neq a$$

이 된다. 한편

$$\mathrm{t}(s) = (x'(s), y'(s))$$

$$\mathrm{t}'(s) = (x''(s),\ y''(s))$$

$$\mathrm{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$$

$$\mathrm{t}'(s) = k(s)\,\mathrm{n}(\mathrm{s})$$

이므로

$$-k(s)\,y'(s) = x''(s)$$

그러므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\ell} k' y\, ds &= [k\,y]_0^{\ell} - \int_0^{\ell} k\,y'\,ds \\ &= 0 + \int_0^{\ell} x''\,ds \quad \textbf{since} \;\; k(\ell) = k(0),\, y(\ell) = y(0) \\ &= x'(\ell) - x'(0) = 0 \;\; \textbf{since} \quad x'(\ell) = x'(0)\end{aligned}$$

따라서 $\int_0^{\ell} k' y\, ds = 0$ **이 되는데 이것은** $k'y < 0)0 < s < \ell, s \neq a)$ **와 모순이다. 그러므로 정점은 3개 이상 존재해야 한다. 그런데** k' **은 정점 좌우에서 부호가 바뀌므로 정점의 수는 짝수이어야 한다.**

따라서 난형선 위에는 적어도 4**개의 정점이 존재할 수 밖에 없다.** ■

[정리] α가 길이 ℓ인 평면위의 폐곡선이고, A를 α가 만드는 영역의 넓이라고 하면, $\ell^2 \geq 4\pi A$이다. 등호가 성립할 필요충분조건은 α가 원(circle)인 경우이다. 그러므로 정해진 길이의 곡선들 중에서 원이 최대 넓이의 영역을 만든다.

(참고) 이 정리는 **등주부등식**(isoperimetiric inequallity)로 불린다.

원의 경우 : $\ell^2 = (2\pi r)^2 = 4\pi^2 r^2 = 4\pi(\pi r^2) = 4\pi A$

3.2 공간곡선의 대역적 이론

[정의] 정칙곡선 $\alpha : [0, \ell] \to \mathrm{E}^3$의 **전곡률(total curvature)**은 $\int_o^\ell \varkappa(s)\,ds$이다.

[참고] $\varkappa = \|\mathrm{T}'\|$이므로 α의 전곡률은 α의 단위접벡터장 T의 구면곡선

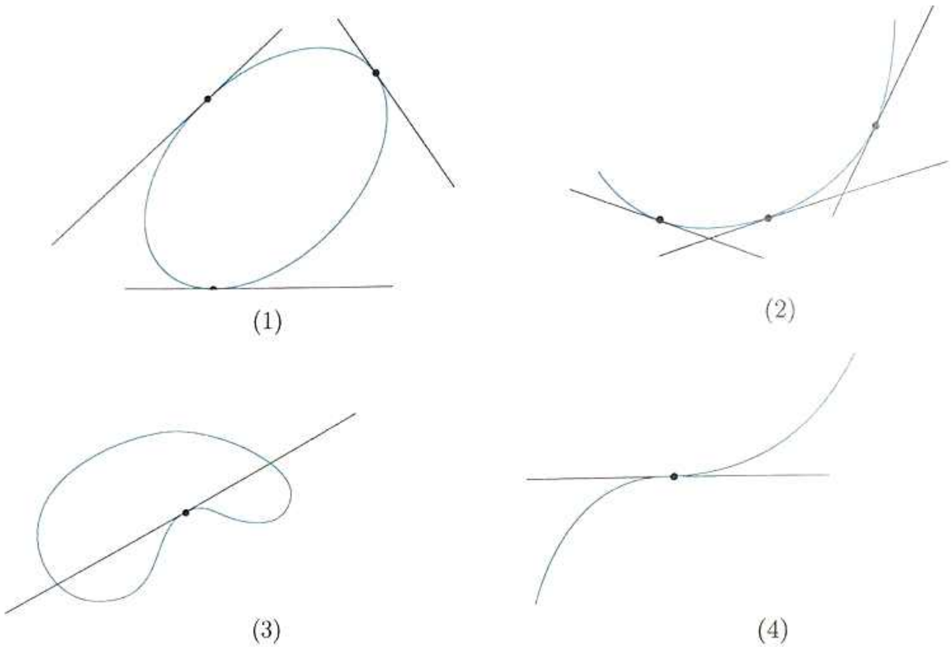
$$\gamma : [0, \ell] \to S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$\gamma(s) = \mathrm{T}(s)$$

의 길이이다.

[정리] (Fenchel 정리) 공간곡선인 폐곡선 α의 전곡률은 $\int_0^{\ell} \varkappa(s)ds \geq 2\pi$이다. 등호가 성립할 필요충분조건은 α가 한 평면에 속하는 볼록곡선이다.

[참고] 정칙인 평면곡선 α가 각 접선의 한쪽에 놓여 있을 때, α를 볼록곡선(Convex Curve)라고 한다. 예를 들어 (1),(2)는 볼록곡선이나, (3),(4)는 볼록곡선이 아니다.



[예제] 타원 $\alpha(t)=(2\cos(t),\sin(t),0),\ (0\leq t\leq 2\pi)$**에서 Fenchel정리를 확인하여 보아라.**

(풀이) $s=s(t)$**를 타원** α**의 호장함수이면,**

$$\int_0^{\ell}\varkappa(s)ds=\int_0^{2\pi}\varkappa(s(t))\frac{ds}{dt}dt=4\int_0^{\pi/2}\varkappa(s(t))\frac{ds}{dt}dt$$

이고,

$$\alpha'(t)=(-2\sin(t),\cos(t),0)$$
$$\alpha''(t)=(-2\cos(t),-\sin(t),0)$$
$$\alpha'\times\alpha''=(0,0,2)$$
$$\varkappa(s(t))=\frac{\|\alpha'\times\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}=\frac{2}{\left(\sqrt{4\sin^2(t)+\cos^2(t)}\right)^3}$$
$$\frac{ds}{dt}=\|\alpha'(t)\|=\sqrt{4\sin^2(t)+\cos^2(t)}$$

이므로, 피적분함수에서 분모와 분자를 각각 $\cos^2(t)$ 로 나누어,

$$\int_0^{\ell} \varkappa(s)ds = 4\int_0^{\pi/2} \frac{2\sec^2(t)}{1+4\tan^2(t)}dt$$

을 얻는다. 여기에서 $u = 2\tan(t)$ 로 놓으면, $du = 2\sec^2(t)\,dt$ 가 되므로,

$$\int_0^{\ell} \varkappa(s)ds = 4\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= 4\lim_{a\to\infty}\left[\tan^{-1}u\right]_0^a = 2\pi$$

타원은 xy 평면에 속하는 볼록곡선이다. ■

[정의] 정칙곡선 $\alpha : [0, \ell] \to \mathrm{E}^3$ 의 **전열률**(total torsion)은 $\int_0^{\ell} \tau(s)\,ds$ 이다.

[정리] 단위구면 S^2 위의 단위속력 폐곡선의 전열률은 0 이다.

제4장 곡면의 국소적 이론

4.1 다변수 벡터함수의 편도함수

[정의] 다변수 벡터함수 $\mathrm{x}=\mathrm{x}(x,y,z)$의 x에 관한 편도함수는

$$\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{x}(x+\Delta x,\ y,\ z)-\mathrm{x}(x,y,z)}{\Delta x}$$

로 정의한다. y에 관한 편도함수는

$$\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\mathrm{x}(x,\ y+\Delta y,\ z)-\mathrm{x}(x,y,z)}{\Delta y}$$

로 정의한다. z에 관한 편도함수는 아래와 같이 정의한다.

$$\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\mathrm{x}(x,\ y,\ z+\Delta z)-\mathrm{x}(x,y,z)}{\Delta z}$$

[정의] 두 개 이상의 변수를 갖는 다변수 함수가 연속인 일계편도함수를 가질 때, 미분가능(differentiable)라고 한다.

다변수 함수 x가 연속인 이계편도함수를 가지면, 이계편도함수는 미분하는 순서에 상관없이 일치한다. 즉

$$\frac{\partial^2 \mathrm{x}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \mathrm{x}}{\partial y \partial x}$$

다변수 벡터함수의 편미분과 전미분에 관한 법칙은 스칼라 함수에 대한 법칙들과 유사한 법칙을 따른다. 편미분에 대하여,

$$\frac{\partial}{\partial x} < \mathrm{x}, \mathrm{y} > = < \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x}, \mathrm{y} > + < \mathrm{x}, \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial x} >$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{x} \times \mathrm{y}) = \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x} \times \mathrm{y} + \mathrm{x} \times \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial x}$$

이고, 전미분에 대하여,

$$d < \mathrm{x}, \mathrm{y} > = < d\mathrm{x}, \mathrm{y} > + < \mathrm{x}, d\mathrm{y} >$$

$$d(\mathrm{x} \times \mathrm{y}) = d\mathrm{x} \times \mathrm{y} + \mathrm{x} \times d\mathrm{y}$$

이고, 3차원 벡터 $\mathrm{x} = \mathrm{x}(x, y, z)$의 전미분 $d\mathrm{x}$는 다음과 같다.

$$d\mathrm{x} = \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial z}dz$$

4.2 곡면의 개념

특별한 언급이 없는 한, 함수 $\mathrm{x}: \mathrm{E}^n \to \mathrm{E}^m$는 미분가능이라고 가정하자.

[정의] 다변수-다가 함수 $\mathrm{x}: \mathrm{E}^n \to \mathrm{E}^m$,

$$\mathrm{x}(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \ \cdots \ , f_m(x_1, \cdots, x_n))$$

에서 다음 $m \times n$ 행렬을 Jacobi 행렬(Jacobian matrix)라고 한다.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

[정의] 함수 $\mathrm{x}: E^n \to E^m$가 E^n의 각 점에서 x의 Jacobi 행렬의 계수가 n일 때 x를 **정칙사상**(regular mapping)이라 한다.

[예제] $\mathrm{x}(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$이라면 $\mathrm{x}: E^2 \to E^2$은 정칙사상인가?

(풀이)

$f_1(u,v) = u^2 - v^2$, $f_2(u,v) = 2uv$라고 할 때, $\mathrm{x}(u,v)$의 Jacobi 행렬은

$$\mathrm{J}(u,v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{bmatrix}$$

이다. $\det(\mathrm{J}(u,v)) = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 = \begin{cases} \neq 0, & (u,v) \neq (0,0) \\ = 0, & (u,v) = (0,0) \end{cases}$

이므로 원점에서는 Jacobi 행렬의 계수가 2가 아니다. 그러므로 $\mathrm{x}(u,v)$는 정칙사상이 아니다. ■

[정의] 개집합 D위의 함수 $\mathrm{x}: D(\subset \mathrm{E}^2) \to \mathrm{E}^3$가 **정칙사상**이고 **1-1함수** 일 때, **좌표조각사상**(coordinate patch)이라 한다.

[참고]

(1) 함수 x가 1-1함수라는 것은 다음 조건이 만족되는 것이다.

$$\mathrm{x}(u,v) = \mathrm{x}(u,v) \Rightarrow (u,v) = (u,v)$$

(2) "함수 x가 정칙사상" $\Leftrightarrow \|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\| \neq 0$

(증명) $\mathrm{x}(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$이라면

"함수 x가 정칙사상"

$\Leftrightarrow$ Jacobi 행렬 $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix}$의 계수가 2이다.

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix}$또는 $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix}$또는 $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix}$의 계수가 2이다.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ 또는 } \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ 또는 } \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ 또는 } \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ 또는 } \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} \right) \neq (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix} \neq (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v \neq (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\| \neq 0 \qquad \blacksquare$$

[예제] $\mathbf{x}(u,v)=(u+v,\ u-v,\ u^2+v^2)$ **이 좌표조각사상임을 보여라.**

(풀이)

$\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ **로 놓으면**

$$x=u+v,\ y=u-v,\ z=u^2+v^2$$

이 되고, u,v **를 제거하면, 타원적 포물면** $z=(x^2+y^2)/2$ **가 된다.**

$\mathbf{x}(u_1,v_1)=\mathbf{x}(u_2,v_2)$

$\Longrightarrow\ (u_1+v_1,u_1-v_1,u_1^2+v_1^2)=(u_2+v_2,u_2-v_2,u_2^2+v_2^2)$

$\Longrightarrow\ u_1+v_1=u_2+v_2,\ u_1-v_1=u_2-v_2,\ u_1^2+v_1^2=u_2^2+v_2^2$

$\Longrightarrow$ **처음 두 방정식을 더하면,** $2u_1=2u_2$**, 빼면** $2v_1=2v_2$

$\Longrightarrow\ u_1=u_2,\ v_1=v_2$

$\Longrightarrow\ (u_1,v_1)=(u_2,v_2)$

그러므로 1-1 함수이다.

$$\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v = \begin{vmatrix} \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_3 \\ 1 & 1 & 2u \\ 1 & -1 & 2v \end{vmatrix}$$

$$= (2v+2u, 2u-2v, -1-1)$$

$$= 2(u+v, u-v, -1)$$

$$\|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\| = 2\sqrt{u^2+2uv+v^2+u^2-2uv+v^2+1}$$

$$= 2\sqrt{2u^2+2v^2+1} \neq 0 \text{ , } \forall (u,v)$$

그러므로 정칙사상이다. 1-1이고 정칙이므로 좌표조각사상이다. ■

[정의] 개집합 D 위의 함수 $\mathrm{x}: D(\subset \mathrm{E}^2) \to \mathrm{E}^3$ 가 좌표조각사상이고 그 역함수 $\mathrm{x}^{-1}: \mathrm{x}(D) \to D$ 가 연속함수일 때, 고유조각사상 (proper patch)이라 한다.

[예제] $\mathbf{x}(u,v)=(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})$ **는 단위원반**

$$D=\{(u,v)\in\mathbf{E}^2 \mid u^2+v^2<1\}$$

위에서 고유조각사상임을 보여라.

(풀이)

$$\mathbf{x}(u_1,v_1)=\mathbf{x}(u_2,v_2)$$

$$\Rightarrow (u_1,v_1,\sqrt{1-u_1^2-v_1^2})=(u_2,v_2,\sqrt{1-u_2^2-v_2^2})$$

$$\Rightarrow (u_1,v_1)=(u_2,v_2)$$

이므로 1-1 함수이다. 모든 $(u,v)\in D$ **에 대하여,**

$$\mathrm{x}_u\times\mathrm{x}_v=\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & -u/\sqrt{1-u^2-v^2} \\ 0 & 1 & -v/\sqrt{1-u^2-v^2} \end{vmatrix}$$

$$=(u/\sqrt{1-u^2-v^2},\ v/\sqrt{1-u^2-v^2},1)$$

$$\|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\| = 1/\sqrt{1-u^2-v^2} > 0, \ ^\forall (u,v) \in D$$

이므로 정칙사상이다. $\mathrm{x}^{-1}(x,y,z) = (x,y)$**는 연속함수이다.**

따라서 x **는 고유조각사상이다.** ■

[예제] $\mathrm{x}(u,v) = (u^2, uv, v^2)$ **은 제1사분면에서 정의된 고유조각사상이다.**

(풀이)

$$\mathrm{x}(u_1,v_1) = \mathrm{x}(u_2,v_2)$$

$$\Longrightarrow (u_1^2, u_1v_1, v_1^2) = (u_2^2, u_2v_2, v_2^2)$$

$\Longrightarrow u_1 = u_2,\ v_1 = v_2$ **, since 제1사분면에서** $u_1 > 0,\ u_2 > 0$

$$\Longrightarrow (u_1,v_1) = (u_2,v_2)$$

이므로 1-1 함수이다.

$$\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2u & v & 0 \\ 0 & u & 2v \end{vmatrix} = (2v^2, -4uv, 2u^2)$$

$\|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\| = 2\sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + v^4} > 0, \ \forall (u,v) \in$ **1사분면**

이므로 $\mathrm{x}(u,v)$ **는 정칙사상이다.** $\mathrm{x}(u,v)$ **의 역함수**

$$\mathrm{x}^{-1}(x,y,z) = (\sqrt{x}, \frac{y}{\sqrt{x}}), \ x > 0, y > 0, z > 0$$

는 연속함수이다. 따라서 x **는 고유조각사상이다.** ■

(주의) $\mathrm{x}: D(\subset \mathrm{E}^2) \to \mathrm{E}^3$ **가 고유조각사상이라 함은** D**가 얇은 고무판 이라고 할 때,** $\mathrm{x}(D)$ **는 찢거나, 구멍내거나, 모서리도 생기거나, 하지 않게** D**를 구부리거나, 잡아 당기거나, 늘여 놓은 것이다.**

[정의] E^3의 부분집합 M은 **곡면**(surface)이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall p \in M$, $\exists$ 고유조각사상 $\mathrm{x}: D(\subset \mathrm{E}^2) \rightarrow M(\subset \mathrm{E}^3)$ and

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ : \ \{q \in M \mid \|p-q\| < \varepsilon\} \subset \mathrm{x}(D)$$

[예제] E^3 안의 단위구면 $S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathrm{E}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\right\}$은 곡면이 됨을 보여라.

(풀이) 점 p가 단위구면 S^2의 북반구에 있는 경우, 함수

$$\mathrm{x}_1(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$$

의 상 $\mathrm{x}_1(D)$는 p를 덮는다. 점 p가 남반구에 있는 경우, 함수

$$\mathrm{x}_2(u,v) = (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2})$$

의 상 $\mathrm{x}_2(D)$는 p를 덮는다. 그러나 적도 위의 점들은 위 2개의 고유조각사상만으로 덮히지 않는다.

하지만 아래 4개를 더 추가하면, 총 6개의 고유조각사상들로 단위구면 위의 점들을 모두 덮을 수 있다.

$$\mathrm{x}(u,v)=(u,\pm\sqrt{1-u^2-v^2},v)$$

$$\mathrm{x}(u,v)=(\pm\sqrt{1-u^2-v^2},u,v)$$

그러므로 단위구면 S^2는 곡면이다. ■

4.3 곡면의 예

전형적인 곡면의 예인 Monge 조각사상을 알아보자.

[정의] $f:D(\subset \mathrm{E}^2)\rightarrow \mathrm{R}$ 가 열린 집합 D위의 미분가능 함수라면,

$$\mathrm{x}(u,v)=(u,v,f(u,v))$$

$$\mathrm{x}(u,v)=(u,f(u,v),v)$$

$$\mathrm{x}(u,v)=(f(u,v),u,v)$$

는 모두 고유조각사상들인데, 이들을 **Monge 조각사상** 이라고 한다.

[예제] 미분가능함수 $f : E^2 \to \mathrm{R}$ **에 대하여, 집합**

$$M = \left\{ (x, y, f(x, y)) \in \mathrm{E}^3 \mid x, y \in \mathrm{R} \right\}$$

는 곡면임을 보여라.

(풀이)

Monge 조각사상 $\mathrm{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ **에 대하여,**

$$\mathbf{x}(u_1, v_1) = \mathbf{x}(u_2, v_2)$$

$$\Longrightarrow (u_1, v_1, f(u_1, v_1)) = (u_2, v_2, f(u_2, v_2))$$

$$\Longrightarrow u_1 = u_2,\ v_1 = v_2$$

$$\Longrightarrow (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$$

이므로 1-1 함수이고

$$\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v = \begin{vmatrix} \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_3 \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = (-f_u, -f_v, 1) \neq (0, 0, 0)$$

이므로 정칙사상이다.

$$\mathrm{x}^{-1}(x, y, z) = (x, y)$$

가 연속이므로 x는 고유조각사상이다. 따라서 M은 곡면이다. ■

[참고] Monge 조각사상들의 상과 같이 하나의 고유조각사상의 상으로 이루어진 곡면을 단순곡면(simple surface) 이라고 한다. 그러므로 "곡면"은 "단순곡면들의 합집합"이다.

[정리] 함수 $g: \mathrm{E}^3 \to \mathrm{R}$가 미분가능하고, c가 상수일 때,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 \mid g(x, y, z) = c\}$$

에 대하여,

$$M\text{은 곡면} \iff {}^{\forall} p \in M, \nabla g(p) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)\bigg|_p \neq (0, 0, 0)$$

($\Longleftarrow$) 가정에 의하여, $^\forall p=(p_1,p_2,p_3)\in M$**에 대하여, 편도함수**

$$\frac{\partial g}{\partial x}(p),\ \frac{\partial g}{\partial y}(p),\ \frac{\partial g}{\partial z}(p)$$

중에서 적어도 하나는 0**이 아니다. 예를 들어** $\dfrac{\partial\, g}{\partial\, z}(p)\neq 0$ **이라면, 음함수의 정리에 의하여,** (p_1,p_2)**의 한 근방** D**에서 방정식**

$$g(x,y,z)=c$$

로부터 z**에 관한 해** $z=h(x,y)$**를 구할 수 있다. 그래서**

1) $^\forall(u,v)\in D,\ g(u,v,h(u,v))=c$

2) $\mathrm{x}(u,v)=(u,v,h(u,v))$**에 의한 치역** $\mathrm{x}(D)$ **는** M **위에서** $p=(p_1,p_2,p_3)$ **의 근방이 된다.**

여기서 $\mathrm{x}(u,v)=(u,v,h(u,v))$**은 Monge 조각사상이다. 점** p **는 곡면** M **위의 임의의 점이므로** M**은 이런 Monge 조각사상들로 이루어진 곡면이다.** ■

($\Longrightarrow$) M이 곡면이므로,

$^{\forall}p \in M$, $\exists$ 고유조각사상 $\mathrm{x}: D(\subset \mathbf{E}^2) \to M(\subset \mathbf{E}^3)$ and $\exists \varepsilon > 0$

: $\{q \in M \mid \|p - q\| < \varepsilon\} \subset \mathrm{x}(D)$

여기에서 $p = (x, y, z)$ 는 M안에 있으므로 $g(x, y, z) = c$를 만족.

$\mathrm{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$는 정칙사상이므로

$\Longrightarrow$ $\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v \neq (0,0,0)$

$\Longrightarrow$점 p에서 $\mathrm{x}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\mathrm{x}_v = (x_v, y_v, z_v)$는 일차독립

점 p에서 $g(x, y, z) = c$의 양변을 u와 v로 편미분

$\Longrightarrow$ 1) $\dfrac{\partial g}{\partial x} x_u + \dfrac{\partial g}{\partial y} y_u + \dfrac{\partial g}{\partial z} z_u = 0$

2) $\dfrac{\partial g}{\partial x} x_v + \dfrac{\partial g}{\partial y} y_v + \dfrac{\partial g}{\partial z} z_v = 0$

$\Longrightarrow$ **1)** $<\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right), (x_u, y_u, z_u) > \; = 0$

2) $<\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right), (x_v, y_v, z_v) > \; = 0$

$\Longrightarrow$ $\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)\Big|_p$ **는** $(x_u, y_u, z_u)|_p$, $(x_v, y_v, z_v)|_p$ **와 동시에 수직**

$\Longrightarrow$ $\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)\Big|_p \neq 0$**, since** $(x_u, y_u, z_u), (x_v, y_v, z_v)$ **는 일차독립**

■

(참고) $dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ **구벡벡터(gradient vector)** $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) \neq (0, 0, 0)$

[예제] 반지름의 길이가 a 인 구면은 곡면임을 보여라.

(풀이)

함수 $g(x,y,z)=(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2$**일 때, 반지름의 길이가** a **이고 중심이** (c_1,c_2,c_3) **인 구면** M **은**

$$M=\{(x,y,z)\in \mathrm{E}^3 \mid g(x,y,z)=a^2\}$$

로 표시되고,

$$\nabla g=(2(x-c_1),2(y-c_2),2(z-c_3))$$

$$\neq (0,0,0) \text{ for } (x,y,z)\neq (c_1,c_2,c_3)$$

이므로 구면 M **은 곡면이다.** ■

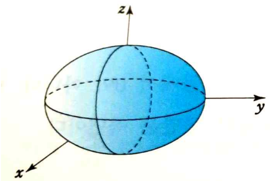
[정의] 일반적인 2차곡면(quadratic surface)은 방정식

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j+\sum_{i=1}^{3} b_i x_i + c = 0$$

으로 표현된다. 단 위에서 $[a_{ij}]$ **은 대칭행렬이다.**

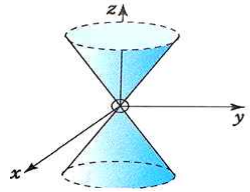
[예제] 좌표의 평행이동과 회전변환에 의하여 2차곡면들은 다음 6가지 중 하나가 된다고 한다. 이 6가지가 모두 곡면임을 보여라.

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ **(타원면)**

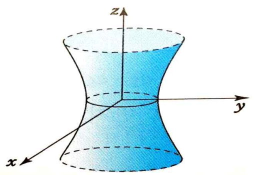


(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ **(원뿔면)**

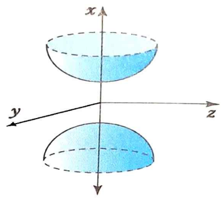
$(x,y,z)=(0,0,0)$ **는 제외**



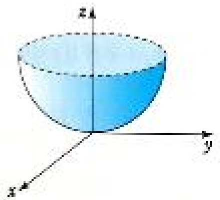
(3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ **(1엽쌍곡면)**



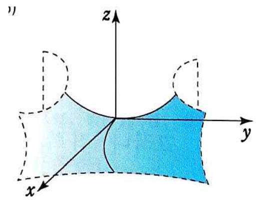
(4) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ **(2엽쌍곡면)**



(5) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-z=0$ **(타원포물면)**



(6) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-z=0$ **(쌍곡포물면)**



(풀이) (1)~(4)를 위하여 $g(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}$ **라고 두면,**

$$g_x=\pm\frac{2x}{a^2},\ g_y=\pm\frac{2y}{b^2},\ g_z=\pm\frac{2z}{c^2}$$

이다. (1)~(4)에는 원점이 포함되지 않고, 원점이 아닌 점에서는 g_x, g_y, g_z**가 동시에** 0**이 되지 않는다. 따라서 (1)~(4)는 모두 곡면이다.**

(5),(6)을 위하여, $g(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}-z$ **라고 두면,**

$$g_z=-1\neq 0$$

이므로 (5),(6)는 모두 곡면이다. ■

[예제] $M=\{(x,y,z)\in\mathrm{E}^3 \mid x^2-2x+yz=c\}$**가 곡면이 되기 위한** c**의 조건을 구하여라.**

(풀이) $g(x,y,z)=x^2-2x+yz$ **로 두자. 세 개의 편도함수**

$$g_x=2x-2,\ g_y=z,\ g_z=y$$

가 동시에 0 **이 되려면**

$$x=1,\ y=0,\ z=0$$

이어야 한다. 그러나 점 $(1,0,0)$ **이 방정식** $g(x,y,z)=c$ **를 만족하기 위한 필요충분조건은** $c=-1$ **이다. 따라서** M **이 곡면이기 위한 필요충분조건은** $c\neq-1$ **이다.** ■

[예제] 곡선 C **가** $f(x,y)=c$ **로 주어졌을 때,**

$$g(x,y,z)\overset{\text{정의}}{=}f(x,y)$$

로 정의하면, 주면(cylinder)은

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbf{E}^3 \mid g(x,y,z)=c\}$$

로 정의 된다. C **가 정칙곡선이면** C **위에서** $(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})\neq(0,0)$

이다. $\nabla g = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, 0) \neq (0,0,0)$ **이므로** M **은 곡면이다.** ■

[예제] 곡선 C **가** $f(x,y) = c$ **로 주어졌을 때,**

$$g(x,y,z) \overset{\text{정의}}{=} f(x, \sqrt{y^2+z^2})$$

로 정의하면, 회전면(surface of revolution)은

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 \mid g(x,y,z) = c\}$$

로 정의된다. C **가 정칙곡선이면** C **위에서** $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \neq (0,0)$ **이다.**

우선 $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}$ **를 구하기 위하여**

$$g(x,y,z) = f(x,r), \;\; r = \sqrt{y^2+z^2}$$

로 놓으면,

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

이다. C **위에서**

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial r}\right) \neq (0,0)\text{,}\ (y,z) \neq (0,0)$$

이고, 또한 $g(x,y,z) = f(x, \sqrt{y^2+z^2})$ **로부터** $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ **이므로,**

$\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial z}$ **가 동시에** 0 **이 되지는 않는다. 따라서 회전면은 곡면이다.** ■

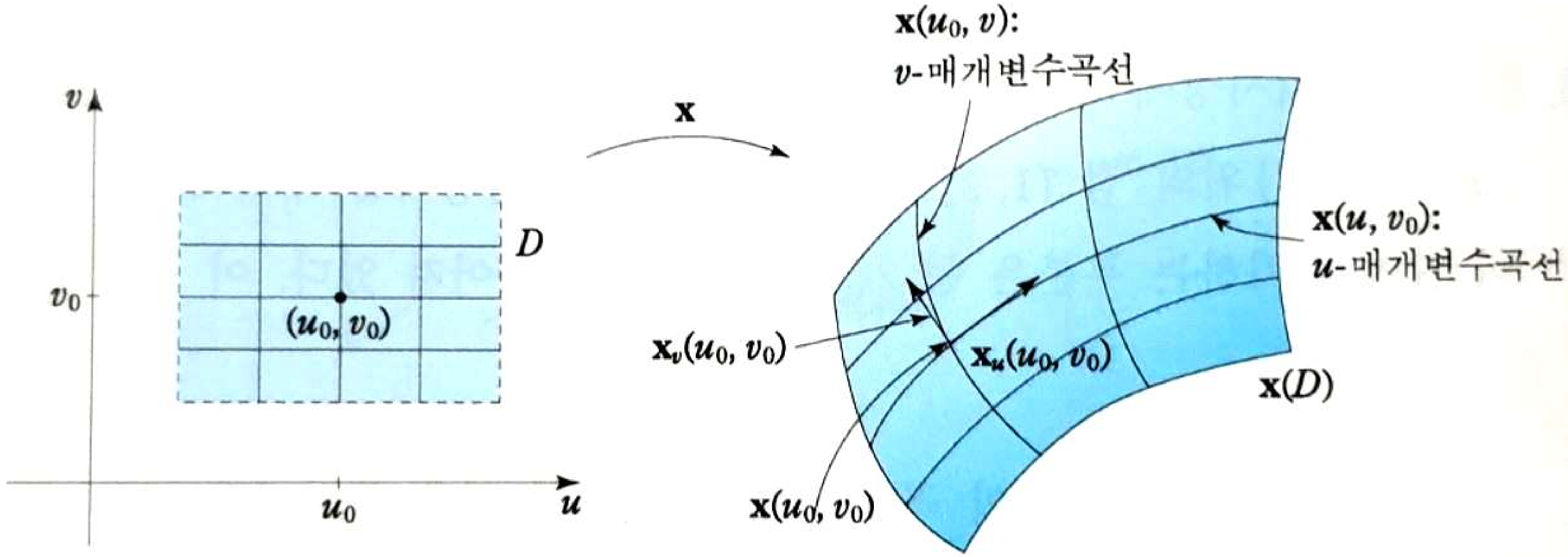
4.4 곡면의 매개변수표현

[정의] $\mathrm{x}: D \rightarrow \mathrm{E}^3$ 가 좌표조각사상이면 D의 한 점 (u_0, v_0)에 대하여

곡선 $\mathrm{x}(u, v_0)$를 x의 $v = v_0$에서의 u-**매개변수곡선**

곡선 $\mathrm{x}(u_0, v)$를 x의 $u = u_0$에서의 v-**매개변수곡선**

편도함수 $\mathrm{x}_u(u_0, v_0)$, $\mathrm{x}_v(u_0, v_0)$ 를 (u_0, v_0)에서의 **편속도벡터**라 한다.



[예제] $\mathrm{x}(u,v)=(u+v,u-v,u^2+v^2)$ **로 정의된** $\mathrm{x}:\mathrm{E}^2 \to \mathrm{E}^3$ **는 이전에 좌표조각사상임을 보였다.** (u_0,v_0) **에서 매개변수곡선들을 구하여라.**

(풀이) u**-매개변수곡선은** $\mathrm{x}(u,v_0)=(u+v_0,u-v_0,u^2+v_0^2)$ **인데,**

$$x=u+v_0,\ y=u-v_0,\ z=u^2+v_0^2$$

첫 두 방정식을 더하거나 빼어,

$$x+y=2u\,,\ x-y=2v_0$$

$$\Longrightarrow\ u=\frac{x+y}{2},\ v_0=\frac{x-y}{2}$$

을 얻고, 이것을 셋째 식 $z=u^2+v_0^2$ **에 넣어서**

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \\ &= \frac{x^2+y^2}{2} \end{aligned}$$

을 얻는다. 그래서 u-매개변수곡선은

$$\text{평면 } x-y=2v_0 \text{ , } \quad \text{포물면 } z=\frac{x^2+y^2}{2}$$

이 만나는 공통부분으로 주어진다. v-매개변수도 비슷하게 정리하면,

$$\text{평면 } x+y=2u_0, \quad \text{포물면 } z=\frac{x^2+y^2}{2}$$

의 공통부분이 됨을 확인 할 수 있다. ■

[정의] 곡면 M에서 $\mathrm{x}(D) \subset M$인 **정칙사상** $\mathrm{x}: D \to \mathbb{E}^3$를 M안에 있는 영역 $\mathrm{x}(D)$의 **매개변수표현**(parametric representation)이라 한다.

[예제] <구면의 매개변수 표현>

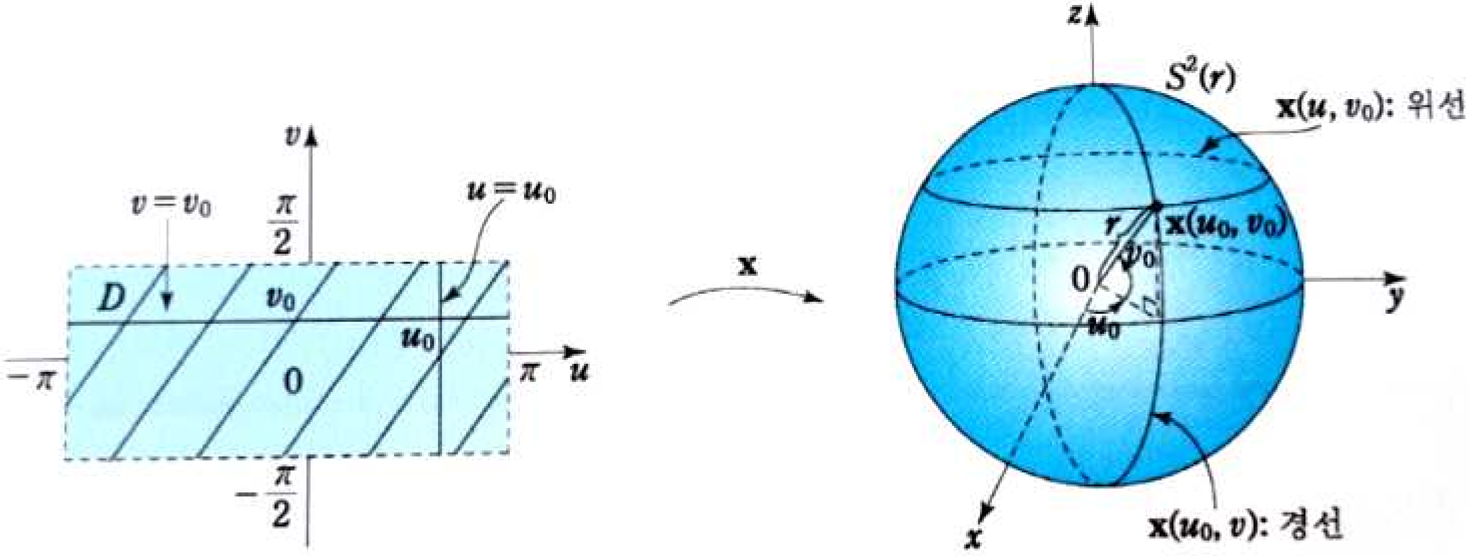
$S^2(r)$는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $r>0$인 구면을 나타낸다.

$S^2(r)$ 위의 점 $\mathrm{x}(u,v)$는 u를 경도로, v를 위도로 하여,

$$\mathrm{x}(u,v) = (r\ \cos(v)\cos(u),\ r\cos(v)\ \cos(u),\ r\ \sin(v)\ )$$

$$-\pi < u < \pi,\ -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$$

로 나타낼 수 있다.



$\mathrm{x}(u,v)$가 구면 위의 점이라는 사실은

$$(r\ \cos(v)\cos(u))^2 +\ (r\cos(v)\ \cos(u))^2 + (r\ \sin(v)\ )^2 = r^2$$

로 확인할 수 있고, $\mathrm{x}(u,v)$는 점 $(0,0,1)$과 점 $(0,0,-1)$을 잇는 반원을 제외한 구면 위의 모든 점을 나타냄을 확인 할 수 있다.

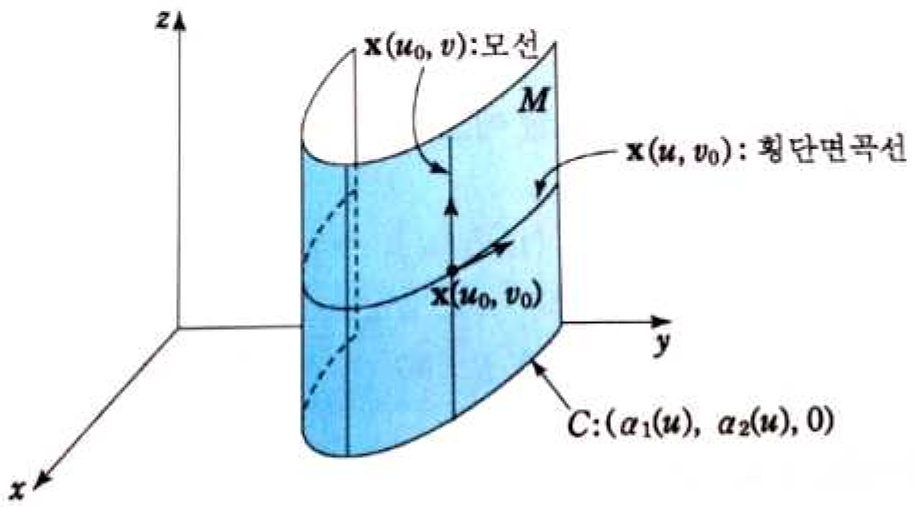
(참고) u-매개변수곡선 $\mathrm{x}(u,v_0)$은 위도 $v=v_0$에서의 한 원(한점 제외됨)을 나타내고, v-매개변수곡선 $\mathrm{x}(u_0,v)$은 경도 $u=u_0$에서의 반 원(양 끝점들 제외)을 나타낸다. 이 표현을 구면의 지리적조각사상이라 한다. ■

[예제] <주면의 매개변수 표현>

평면 곡선 $\alpha(u)=(\alpha_1(u),\alpha_2(u))$이 정칙곡선이면

$$\alpha'(u)=\left(\frac{d\alpha_1}{du},\frac{d\alpha_2}{du}\right)\neq(0,0),\ ^{\forall}u$$

이다.



xy 평면곡선 $\alpha(u)$을 z축으로 평행이동시켜 만든 주면의 매개변수표현은

$$\mathrm{x}(u,v) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), v)$$

로 나타낼 수 있다. 여기에서

$$\mathrm{x}_u = \left(\frac{d\alpha_1}{du}, \frac{d\alpha_2}{du}, 0\right),\ \mathrm{x}_v = (0, 0, 1)$$

$$\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v = \left(\frac{d\alpha_2}{du}, -\frac{d\alpha_1}{du}, 0\right) \neq (0,0,0)$$

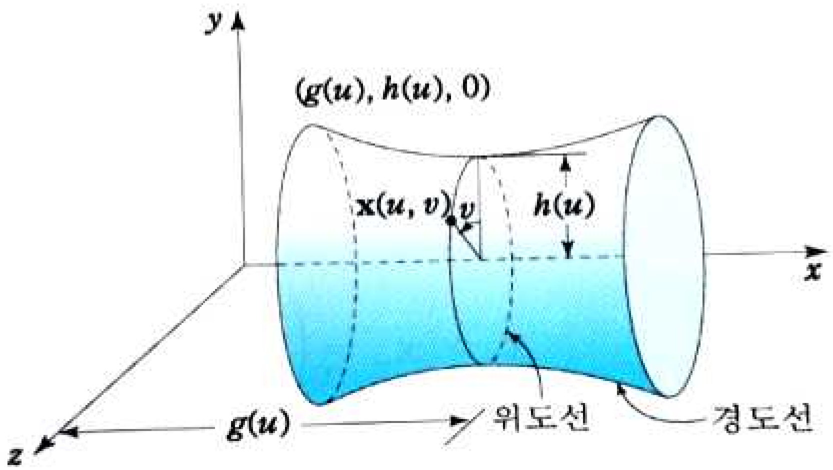
이므로 x는 정칙사상이다. 따라서 x는 주면의 매개변수표현이다.

u-매개변수 곡선 $(\alpha_1(u), \alpha_2(u), 0)$는 주면의 **횡단면곡선** (cross sectional curve)이라 한다. v-매개변수 곡선은 직선으로 주면의 **모선**(ruling 또는 generating curve)이라 한다. 곡선 α가 폐곡선이 아니면 x는 일대일이 되므로 x는 좌표조각사상이 된다. ■

[예제] <회전면의 매개변수 표현>

xy평면 위의 정칙곡선 $\alpha(u) = (g(u), h(u), 0)$ $(h(u) > 0)$을 x축을 중심으로 각 v만큼 회전하여 얻은 **회전면** M의 매개변수 표현은

$$\mathrm{x}(u,v) = (g(u),\ h(u)\cos(v),\ h(u)\sin(v))$$



이다. 왜냐하면, $\alpha'(u) = (g'(u), h'(u), 0)) \neq (0,0),\ \ h(u) > 0$ **이라서**

$$\mathrm{x}_u = (\ g'(u),\ \ h'(u)\cos(v),\ \ h'(u)\sin(v)\ )$$

$$\mathrm{x}_v = (\quad 0\ \ ,\ -h(u)\sin(v),\ h(u)\cos(v)\ )$$

$$\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v = (h(u)h'(u),\ -h(u)g'(u)\cos(v),\ -h(u)g'(u)\sin(v))$$

$$\|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\| = h(u)\sqrt{h'(u)^2 + g'(u)^2}\ \neq 0$$

이므로 x **가 정칙사상이기 때문이다.** u **의 범위를 적당히 제한하면** x **는 1-1함수가 되어 좌표조각사상이 될 수 있다.**

u **-매개변수곡선은** M **의 경도선(meridians),**

v **-매개변수곡선은** M **의 위도선(parallels) 이라 한다.** ■

[참고] 구면의 지리적 조각사상은 회전면의 한 예이다.

[예제] <윤환면의 매개변수 표현>

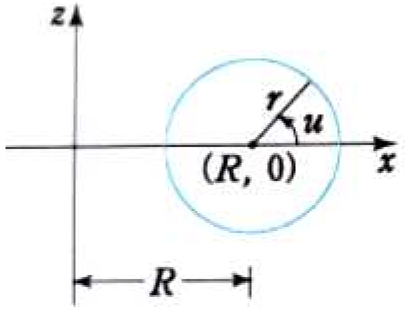
원점에서 R만큼 떨어진 x축 위에 중심이 있는 xz평면 위의 원

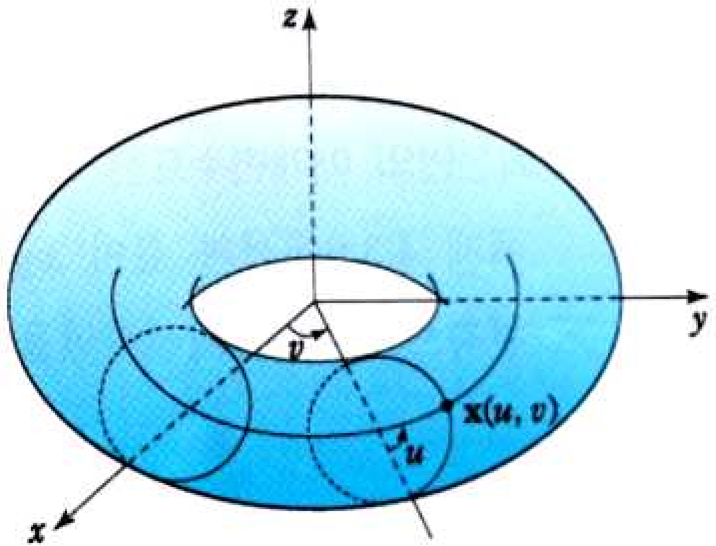
$$\alpha(u) = (R + r\cos(u), 0, r\sin(u)), R > r$$

을 z축을 중심으로 회전각 v만큼 회전하여 얻은 윤환면(torus) M의 매개변수 표현은

$$\mathrm{x}(u,v) = ((R + r\cos(u))\cos(v), (R + r\cos(u))\sin(v), r\sin(u))$$

이다. 왜냐하면, $\|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\| = r(R + r\cos(u)) \neq 0$으로 x는 정칙이다. ■





4.5 기본형식

[정의] 곡면 M위의 점 p에 대하여, 한 벡터 v가 점 p에서 M위의 한 곡선의 속도벡터일 때, v를 점 p에서 M에 접하는 **접벡터**(tangent vector)라고 한다. 점 p에서 M에 접하는 모든 접벡터들의 집합을 **접평면**(tagent plane)이라고 하고 $T_p(M)$로 표시한다.

고유조각사상 $\mathrm{x}(u,v)=(x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$를 가진 곡면 M위의 한 점 $\mathrm{p}=(p_1,p_2,p_3)$에서의 접벡터 $\mathrm{x}_u, \mathrm{x}_v$를 포함하는 평면은 곡면 M의 **접평면**이 된다. 이 접평면 위의 점 $\mathrm{y}=(x,y,z)$를 나타내는 방정식은

$$\mathrm{y}=\mathrm{p}+\lambda \mathrm{x}_u+\mu \mathrm{x}_v,\quad \lambda,\mu\in \mathrm{R}$$

또는

$$<\mathrm{y}-\mathrm{p},\ \mathrm{x}_u\times \mathrm{x}_v>=0$$

또는

$$\begin{vmatrix} x-p_1 & y-p_2 & z-p_3 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

이다.

[예제] $\mathrm{x}(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ **으로 주어진 곡면에서** $(u,v) = (1,1)$ **에 대응되는 곡면 위의 점에서의 접평면의 방정식을 구하여라.**

(풀이)

$\mathrm{x}(1,1) = (1,1,0)$ **이고**

$$\mathrm{x}_u(u,v) = (1,0,2u), \quad \mathrm{x}_v(u,v) = (0,1,-2v)$$

이므로

$$\mathrm{x}_u(1,1) = (1,0,2), \quad \mathrm{x}_v(1,1) = (0,1,-2)$$

이다.

곡면 위의 점 $\mathrm{x}(1,1)=(1,1,0)$에서의 접평면의 방정식은

$$(x,y,z)=\mathrm{x}(1,1)+\lambda\,\mathrm{x}_u(1,1)+\mu\,\mathrm{x}_v(u,v)$$

$$=(1,1,0)+\lambda\,(1,0,2)+\mu\,(0,1,-2)$$

$$=(1+\lambda,\ 1+\mu,\ 2\lambda-2\mu),\quad {}^{\forall}\lambda,\mu\in\mathrm{R}$$

또는 행렬식으로 표현하면,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

되어 정리하면

$$-2\,(x-1)+2\,(y-1)+z=0$$

$$2x-2y-z=0$$

이 된다. ■

[정의] $\mathrm{x}(u,v)$를 곡면 M의 고유조각사상이라 하면, 곡면 위의 점 p에서

$$\mathrm{U} = \frac{x_u \times \mathrm{x}_v}{\|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\|}$$

는 접평면에 직교하는 단위벡터이다. 이 때 U를 곡면 M 위의 **단위법벡터장**(unit normal vector field)라고 하고, U를 포함하는 직선을 점 p에서의 그 곡면의 **법선**(normal line)이라고 한다.

(참고) (1) M의 법벡터장으로 $-\mathrm{U}$를 선택할 수도 있다.

(2) 곡선위의 점 x에서의 법선의 방정식 y는 다음과 같다.

$$\mathrm{y} = \mathrm{x} + t\mathrm{U},\ \ {}^{\forall}t \in \mathrm{R}$$

[예제] $\mathrm{x}(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ 으로 주어진 곡면에서 $(u,v) = (1,1)$에 대응되는 곡면 위의 점 $\mathrm{x}(1,1)$에서의 법선의 방정식을 구하여라.

(풀이)

$$\mathrm{x}_u(1,1) = (1,0,\ \ 2)$$
$$\mathrm{x}_v(1,1) = (0,1,-2)$$

$$\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v = (-2, 2, 1)$$

$$\|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\| = 3$$

이므로 단위법선벡터는

$$\mathrm{U} = \frac{x_u \times \mathrm{x}_v}{\|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\|} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

이다. 법선의 방정식 y **는**

$$\begin{aligned} \mathrm{y} &= \mathrm{x} + t\mathrm{U} \\ &= (1,1,0) + t\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(1-\frac{2}{3}t, 1+\frac{2}{3}t, \frac{1}{3}t\right),\ \ {}^{\forall} t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

이다. ■

[정리] $M = \{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 \mid g(x,y,z) = c\}$ **이 곡면**

$$\Leftrightarrow \text{ (1) } \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) \neq 0$$

(2) ∇g **는** M **의 법벡터장이다.**

(증명)

M **이 곡면이므로** $\nabla g \neq 0$ **이다.** M **위의 임의의 점** p **를 지나는 임의의 접벡터** v **가** ∇g **와 직교함을 보이자. 점** p **를 지나는** M **위의 임의의 곡선** $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ **는**

$$g(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) = c$$

를 만족한다. 양변을 t **에 관하여 미분하면, 연쇄법칙을 사용하여,** t **에서,**

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{d\alpha_2}{dt} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{d\alpha_3}{dt} = 0$$

이므로, $\alpha(0) = \mathrm{p}$, $\alpha'(0) = \mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$ **인 곡선** α **를 선택하면**

$$\frac{\partial g}{\partial x}v_1 + \frac{\partial g}{\partial y}v_2 + \frac{\partial g}{\partial z}v_3 = 0$$

$$< (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}), (v_1, v_2, v_3) >= 0$$

$$< \nabla g, \mathrm{v} >= 0$$

이 되어, ∇g 는 v 에 직교함을 알 수 있다. ■

[예제] 반지름의 길이가 r 인 구면

$$S^2(r) = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\right\}$$

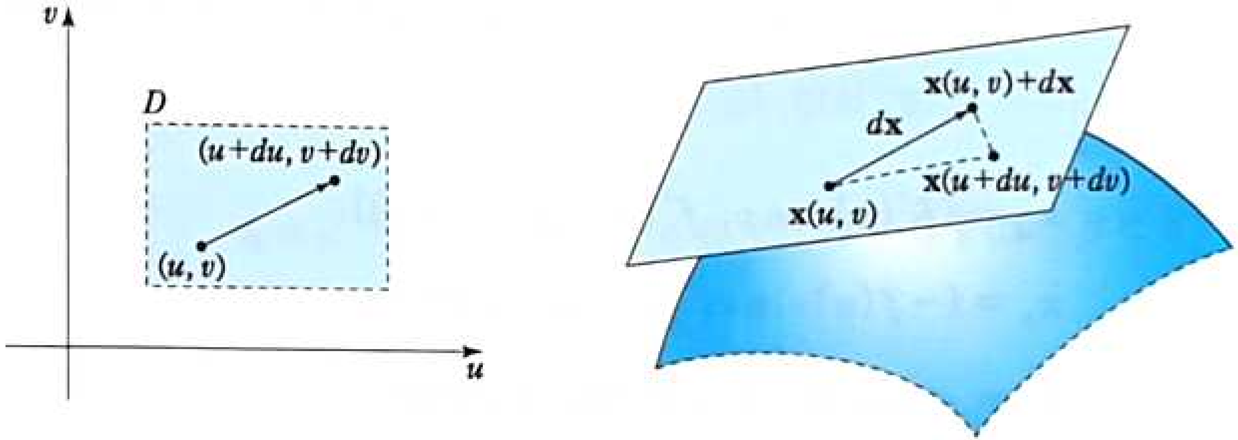
의 단위법벡터장을 구하여라.

(풀이)

$\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ **이므로 단위법벡터장은**

$$\mathrm{U} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{(x, y, z)}{r} \quad ■$$

(참고) 미분 $d\mathrm{x}=\mathrm{x}_u du+\mathrm{x}_v dv$ 는 M 위의 점 $\mathrm{x}(u,v)$ 로부터 점 $\mathrm{x}(u+du,v+dv)$ 로 가는 벡터의 근사값이다.



[정의] 고유조각사상 $\mathrm{x}(u,v)$ 의 미분을 $\mathrm{x}=\mathrm{x}_u du+\mathrm{x}_v dv$ 라 할 때, $\mathrm{x}(u,v)$ 의 제1기본형식(first fundamental form)은 함수

$$I=<d\mathrm{x},d\mathrm{x}>$$

로 정의한다. 더불어

$$E=<\mathrm{x}_u,\mathrm{x}_u>,\ F=<\mathrm{x}_u,\mathrm{x}_v>=<\mathrm{x}_v,\mathrm{x}_u>,\ G=<\mathrm{x}_v,\mathrm{x}_v>$$

를 제1기본계수(first fundamental coefficients)라고 한다.

곡면 위의 두 점 $\mathrm{x}(u,v)$, $\mathrm{x}(u+du,v+dv)$**을 잇는 곡선의 호의 길이는**

$$ds = \sqrt{< d\mathrm{x}, d\mathrm{x} >} = \|d\mathrm{x}\|$$

을 적분하면 구할 수 있다. 제1기본형식은 $I = ds^2$ **이다.**

[정리] (1) $I = ds^2 \geq 0$

(2) $I = 0 \Leftrightarrow (du = 0 \wedge dv = 0)$

(3) $I = Edu^2 + 2F\,du\,dv + Gdv^2$

(4) $\sqrt{EG - F^2} = \|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\|$

(5) $\sqrt{EG - F^2} > 0$

(증명)

(1) $I = < d\mathrm{x}, d\mathrm{x} > \; = \|d\mathrm{x}\|^2 = ds^2 \geq 0$

(2) $I = 0 \Leftrightarrow \|d\mathrm{x}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|d\mathrm{x}\| = 0$

$$\Leftrightarrow d\mathrm{x} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x}_u du + \mathrm{x}_v dv = 0 \Leftrightarrow du = 0 \wedge dv = 0$$

(맨끝 $\Leftrightarrow$ **에서, 곡면인 경우** $\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v \neq 0$ **이므로** $\mathrm{x}_u \neq 0,\ \mathrm{x}_v \neq 0$ **)**

(3) $I = < d\mathrm{x}, d\mathrm{x} > \quad = < \mathrm{x}_u du + \mathrm{x}_v dv\,, \mathrm{x}_u du + \mathrm{x}_v dv >$

$$= < \mathrm{x}_u, \mathrm{x}_u > du^2 + < \mathrm{x}_u, \mathrm{x}_v > du\,dv$$

$$+ < \mathrm{x}_v, \mathrm{x}_u > dv\,du + \; < \mathrm{x}_v, \mathrm{x}_v > dv^2$$

$$= E du^2 + 2F\,du\,dv + G dv^2$$

(4) $EG - F^2 = < \mathrm{x}_u, \mathrm{x}_u >< \mathrm{x}_v, \mathrm{x}_v > \; - < \mathrm{x}_u, \mathrm{x}_v >^{\,2}$

$$= \|\mathrm{x}_u\|^2 \|\mathrm{x}_v\|^2 \left(1 - \frac{< \mathrm{x}_u, \mathrm{x}_v >^{\,2}}{\|\mathrm{x}_u\|^2 \|\mathrm{x}_v\|^2} \right)$$

$= \|\mathrm{x}_u\|^2 \|\mathrm{x}_v\|^2 (1 - \cos^2\theta)$, **(θ 는 $\mathrm{x}_u, \mathrm{x}_v$ 사이의 각)**

$$= \|\mathrm{x}_u\|^2 \|\mathrm{x}_v\|^2 \sin^2\theta$$

$$= \|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\|^2$$

(5) 곡면에서는 $\|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\| \neq 0$ **이므로** $\sqrt{EG - F^2} > 0$ ■

[예제] 회전면 $\mathrm{x}(u,v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u))$**의 제1기본형식을 구하여라.**

(풀이)

$$\mathrm{x}_u = (f'(u)\cos(v), f'(u)\sin(v), g'(u))$$

$$\mathrm{x}_v = (-f(u)\sin(v), f(u)\cos(v),\ 0\ )$$

$$E = <\mathrm{x}_u, \mathrm{x}_u> = f'(u)^2 + g'(u)^2$$

$$F = <\mathrm{x}_u, \mathrm{x}_v> = 0$$

$$G = <\mathrm{x}_v, \mathrm{x}_v> = f^2(u)$$

이므로 제1기본형식은 다음과 같다.

$$I = (f'(u)^2 + g'(u)^2)du^2 + f^2(u)dv^2 \qquad \blacksquare$$

[정리] 고유조각사상 $\mathrm{x}(u,v)$ **위의 정칙곡선** $\mathrm{x}(u(t),v(t))$ $(\ a \le {}^{\forall} t \le b\ )$**의 호의 길이는 다음과 같다.**

$$s = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{du}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$$

(증명) 정칙곡선 $\mathrm{x}(u(t), v(t))$ $(\, a \le {}^{\forall} t \le b \,)$**을** t**에 관하여 미분하면**

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \mathrm{x}_u \frac{du}{dt} + \mathrm{x}_v \frac{dv}{dt}$$

이므로

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left\| \frac{d\mathrm{x}}{dt} \right\|^2 = \left\langle \frac{d\mathrm{x}}{dt}, \frac{d\mathrm{x}}{dt} \right\rangle$$

$$= \left\langle \mathrm{x}_u \frac{du}{dt} + \mathrm{x}_v \frac{dv}{dt} \,,\, \mathrm{x}_u \frac{du}{dt} + \mathrm{x}_v \frac{dv}{dt} \right\rangle$$

$$= E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

을 얻는다. 호의 길이 s**는**

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \frac{ds}{dt} dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt \qquad \blacksquare$$

[예제] 원추면 $\mathrm{x}(u,v)=(u\cos(v), u\sin(v), u)$ **위의 호**

$$u=\exp\left(t\cot\beta/\sqrt{2}\right), v=t,\ 0\le t\le\pi,\ \beta=\text{상수}\ (0<\beta<\pi)$$

의 길이를 구하여라.

(풀이)

$$\mathrm{x}_u=(\cos(v),\ \sin(v), 1),\qquad \mathrm{x}_v=(-u\sin(v), u\cos(v),\ 0\ )$$

$$E=<\mathrm{x}_u,\mathrm{x}_u>=2,\quad F=<\mathrm{x}_u,\mathrm{x}_v>=0,\quad G=<\mathrm{x}_v,\mathrm{x}_v>=u^2$$

$$\frac{du}{dt}=\left(\cot\beta/\sqrt{2}\right)u,\quad \frac{dv}{dt}=1$$

이므로 호의 길이 s **는 다음과 같다.**

$$\begin{aligned}
s&=\int_a^b\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt\\
&=\int_0^\pi\sqrt{2(\cot^2\beta/2)\,u^2+u^2}\,dv=\sqrt{\cot^2\beta+1}\int_0^\pi u\,dv\\
&=\sqrt{\cot^2\beta+1}\int_0^\pi\exp(v\cot\beta/\sqrt{2})\,dv=\csc\beta\frac{\sqrt{2}}{\cot\beta}\left[\exp\left(v\cot\beta/\sqrt{2}\right)\right]_{v=0}^{v=\pi}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{\cos\beta}\left(\exp(\pi\cot\beta/\sqrt{2})-1\right)\qquad\blacksquare
\end{aligned}$$

[정리] 고유조각사상 $\mathrm{x}(u,v)$ 에서

(1) 두 접벡터 $d\mathrm{x} = \mathrm{x}_u du + \mathrm{x}_v dv$ 와 $\delta\mathrm{x} = \mathrm{x}_u \delta u + \mathrm{x}_v \delta v$ 가 직교

$$\Leftrightarrow E(du\,\delta u) + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0$$

(2) 곡면위 점에서 u-매개변수곡선과 v-매개변수곡선이 직교

$$\Leftrightarrow F = 0$$

(증명)

(1) 두 접벡터 $d\mathrm{x}$ 와 $\delta\mathrm{x}$ 가 이루는 각을 θ 라고 하면

$$\cos\theta = \frac{< d\mathrm{x}, \delta\mathrm{x} >}{\|d\mathrm{x}\|\|\delta\mathrm{x}\|} = \frac{E(du\,\delta u) + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\|\mathrm{dx}\|\ \|\delta\mathrm{x}\|}$$

이므로 $d\mathrm{x} \perp \delta\mathrm{x} \ \Leftrightarrow \cos\theta = 0$

$$\Leftrightarrow E(du\,\delta u) + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0$$

(2) $\theta =$ u-매개변수곡선과 v-매개변수곡선이 이루는 각

$\Leftrightarrow \theta = \mathrm{x}_u$ **와** x_v **가 이루는 각**

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{<\mathrm{x}_u, \mathrm{x}_v>}{\|\mathrm{x}_u\| \, \|\mathrm{x}_v\|}$$

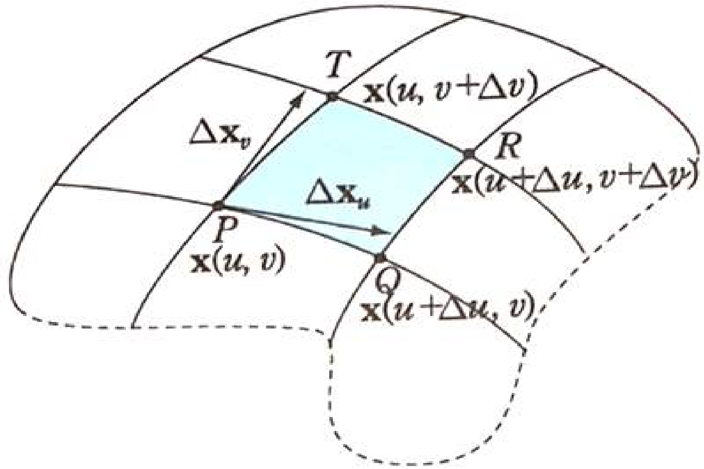
이므로

$$\mathrm{x}_u \perp \mathrm{x}_v \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow <\mathrm{x}_u, \mathrm{x}_v> = 0 \Leftrightarrow F = 0 \quad \blacksquare$$

[정리] 고유조각사상 $\mathrm{x}(u,v)$ **위의 영역** R**의 넓이는**

$$A = \iint_W \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

이다. 여기서 $W = \mathrm{x}^{-1}(R)$ **이다.**



(증명)

점 $\mathrm{x}(u,v)$**에 이웃하는 4점**

$$\mathrm{x}(u,v), \mathrm{x}(u+\Delta u, v), \mathrm{x}(u, v+\Delta v),$$

$\mathrm{x}(u+\Delta u, v+\Delta v)$ **으로 둘러싸인 영역의 넓이** ΔA**는 두 접벡터**

$\mathrm{x}_u \Delta u$와 $\mathrm{x}_v \Delta v$를 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이

$$\Delta A \approx \|(\Delta \mathrm{x})_u \times (\Delta \mathrm{x})_v\| = \|(\mathrm{x}_u \Delta u) \times (\mathrm{x}_v \Delta v)\|$$

$$= \|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\| \Delta u \, \Delta v = \sqrt{EG - F^2}\, \Delta u \, \Delta v$$

으로 근사된다. 따라서 곡면위의 영역 R의 넓이는, $W = \mathrm{x}^{-1}(R)$일 때,

$$A = \iint_W dA = \iint_W \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \quad \blacksquare$$

[예제] $0 < r < R$ **일 때, u와 v의 영역**

$$W = \{(u,v) \mid 0 < u < 2\pi,\ 0 < v < 2\pi\}$$

위의 윤환면의 고유조각사상 $\mathrm{x} : W \to \mathrm{E}^3$,

$$\mathrm{x}(u,v) = ((R + r\cos(u))\cos(v),\ (R + r\cos(u))\sin(v),\ r\sin(u))$$

에 대해, 윤환면의 넓이를 구하라.

(풀이)

$$\mathrm{x}_u = (-r\sin u\cos v,\ -r\sin u\sin v, r\cos u)$$
$$\mathrm{x}_v = (-(R+r\cos u)\sin v,\ (R+r\cos u)\cos v, 0)$$

이므로

$$E = r^2, F = 0,\ G = (R+r\cos u)^2$$
$$\sqrt{EG-F^2} = r(R+r\cos u)$$

이다. 따라서 윤환면의 넓이는 다음과 같다.

$$A = \iint_W \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R+r\cos u)\,du\,dv$$
$$= 2\pi r R\int_0^{2\pi} dv = 4\pi^2 r R \qquad \blacksquare$$

[정의] 고유조각사상 $\mathrm{x} = \mathrm{x}(u,v)$과 곡면위의 단위법벡터장 U에 대하여,

$$0 = d < \mathrm{U},\mathrm{U} > = 2 < d\mathrm{U},\mathrm{U} >$$

이므로 $d\mathrm{U}$는 점 x에서 U와 직교하여 접평면에 속하는 벡터이다. $d\mathrm{x} = \mathrm{x}_u du + \mathrm{x}_v dv$ 도 접평면에 속한 벡터인데, 이때 함수

$$II = -< d\mathrm{x}, d\mathrm{U} >$$

를 **제2기본형식**(2nd fundamental form)이라고 한다.

[정리] 고유조각사상 $\mathrm{x} = \mathrm{x}(u,v)$과 곡면위의 단위법벡터장 U에 대하여 제2기본형식은

$$II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

로 주어진다. 여기서 L, M, N은 다음과 같다.

$$L = -< \mathrm{x}_u, \mathrm{U}_u >$$

$$2M = -< \mathrm{x}_u, \mathrm{U}_v > -< \mathrm{x}_v, \mathrm{U}_u >$$

$$N = -< \mathrm{x}_v, \mathrm{U}_v >$$

(증명)

$$\begin{aligned} II &= -< d\mathrm{x}, d\mathrm{U} > \\ &= -< \mathrm{x}_u du + \mathrm{x}_v dv, \mathrm{U}_u du + \mathrm{U}_v dv > \\ &= -< \mathrm{x}_u, \mathrm{U}_u > du^2 - < \mathrm{x}_u, \mathrm{U}_v > du\,dv \\ &\qquad - < \mathrm{x}_v, \mathrm{U}_u > dv\,du - < \mathrm{x}_v, \mathrm{U}_v > dv^2 \end{aligned}$$ ■

[정의] 제2기본형식에 있는 L, M, N을 제2기본계수 (2nd fundamental coefficient)라고 한다.

[정리] 고유조각사상 $\mathrm{x} = \mathrm{x}(u, v)$과 곡면위의 단위법벡터장 U에 대하여 제2기본형식은

$$II = < d^2\mathrm{x}, \mathrm{U} >$$

로 주어진다. 여기서 $d^2\mathrm{x}$는 아래와 같다.

$$d^2\mathrm{x} = \mathrm{x}_{uu} du^2 + 2\mathrm{x}_{uv} du\,dv + \mathrm{x}_{vv} dv^2$$

(증명)

$<\mathrm{x}_u, \mathrm{U}> = 0$, $<\mathrm{x}_v, \mathrm{U}> = 0$ **이므로 각각 양변을 미분하면**

$$\frac{\partial}{\partial u} < \mathrm{x}_u, \mathrm{U} > \; = \; < \mathrm{x}_{uu}, \mathrm{U} > + < \mathrm{x}_u, \mathrm{U}_u > \; = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v} < \mathrm{x}_u, \mathrm{U} > \; = \; < \mathrm{x}_{uv}, \mathrm{U} > + < \mathrm{x}_u, \mathrm{U}_v > \; = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u} < \mathrm{x}_v, \mathrm{U} > \; = \; < \mathrm{x}_{vu}, \mathrm{U} > + < \mathrm{x}_v, \mathrm{U}_u > \; = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v} < \mathrm{x}_v, \mathrm{U} > \; = \; < \mathrm{x}_{vv}, \mathrm{U} > + < \mathrm{x}_v, \mathrm{U}_v > \; = 0$$

을 얻는다. 그러므로

$$< \mathrm{x}_{uu}, \mathrm{U} > \; = \; - < \mathrm{x}_u, \mathrm{U}_u >$$

$$< \mathrm{x}_{uv}, \mathrm{U} > + < \mathrm{x}_{vu}, \mathrm{U} > \; = \; - < \mathrm{x}_u, \mathrm{U}_v > - < \mathrm{x}_v, \mathrm{U}_u >$$

$$< \mathrm{x}_{vv}, \mathrm{U} > \; = \; - < \mathrm{x}_v, \mathrm{U}_v >$$

이 되는데, 제2기본계수 L, M, N **를 사용하여 표시하면**

$$\begin{aligned} <\mathrm{x}_{uu},\mathrm{U}> &= L \\ <\mathrm{x}_{uv},\mathrm{U}>+<\mathrm{x}_{vu},\mathrm{U}> &= 2M \\ <\mathrm{x}_{vv},\mathrm{U}> &= N \end{aligned}$$

이다. x**가 연속인 2계편도함수를 가지면** $\mathrm{x}_{uv}=\mathrm{x}_{vu}$ **이므로**

$$<\mathrm{x}_{uv},\mathrm{U}> \; = \; <\mathrm{x}_{vu},\mathrm{U}> \; = M$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} II &= L du^2 + 2M du dv + N dv^2 \\ &= <\mathrm{x}_{uu},\mathrm{U}> du^2 + 2<\mathrm{x}_{uv},\mathrm{U}> du dv + <\mathrm{x}_{vv},\mathrm{U}> dv^2 \\ &= <\mathrm{x}_{uu} du^2 + 2\mathrm{x}_{uv} du dv + \mathrm{x}_{vv} dv^2, \mathrm{U}> \\ &= <d\mathrm{x}^2, \mathrm{U}> \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

[예제] $\mathrm{x}(u,v)=(u,v,u^2-v^2)$ **로 표현되는 곡면의 제2기본형식을 구하라.**

(풀이)

$$\mathrm{x}_u=(1,0,2u),\ \mathrm{x}_v=(0,1,-2v)$$

$$\mathrm{x}_{uu}=(0,0,2),\ \mathrm{x}_{uv}=(0,0,0),\ \mathrm{x}_{vv}=(0,0,-2)$$

이고,

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v}{\|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\|} = \frac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

이므로 제2기본계수들은

$$L = <\mathrm{x}_{uu}, \mathrm{U}> \; = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^{2+1}}}$$

$$M = <\mathrm{x}_{uv}, \mathrm{U}> \; = 0$$

$$N = <\mathrm{x}_{vv}, \mathrm{U}> \; = \frac{-2}{\sqrt{4u^2 + 4v^{2+1}}}$$

이고, 제2기본형식은

$$II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = \frac{2(du^2 - dv^2)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \qquad ■$$

[정의] 고유조각사상 $\mathrm{x} = \mathrm{x}(u, v)$ 의 제2기본형식

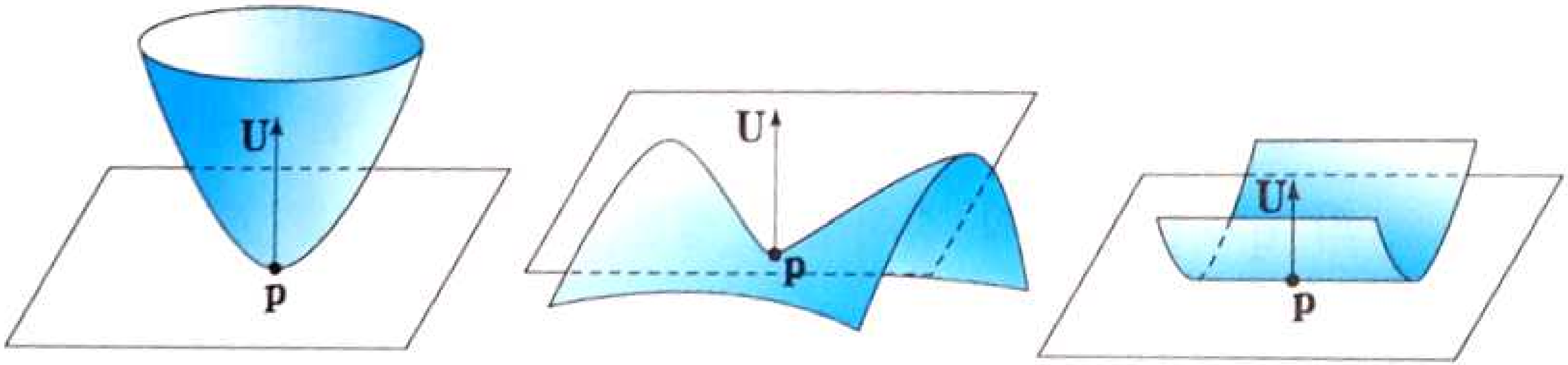
$$II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

에서 판별식 $D = M^2 - LN$ 에 따라 곡면위의 점은 다음 같이 분류된다.

(1) $D < 0$ 이면 **타원점**(elliptic point)

(2) $D > 0$ 이면 **쌍곡점**(hyperbolic point)

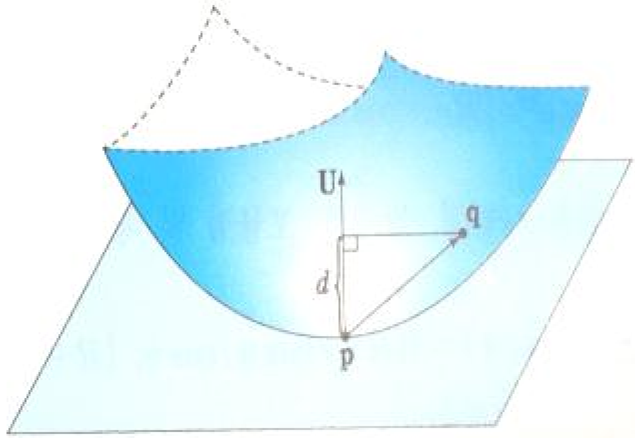
(3) $D = 0$ 이면 **포물점**(parabolic point). 포물점들 중에서, 특히 $L = M = N = 0$ 이면 **평탄점**(planar point) 이라 한다.



(1) (2) (3)

[참고] p는 곡면위의 한 점, q는 p의 근방에 속한 점이고, $\mathrm{x} = \mathrm{x}(u,v)$는 p,q를 포함하는 고유조각사상이라 하자. 점 p에서 벡터 $\mathrm{q}-\mathrm{p}$의 단위법벡터 U방향의 성분 d는 Taylor 전개식을 이용하여

$$
\begin{aligned}
d &= < \mathrm{q} - \mathrm{p}, \mathrm{U} > \\
&= < \mathrm{x}(u,v) - \mathrm{x}(u_0,v_0),\ \mathrm{U} > \\
&\approx < d\mathrm{x} + \tfrac{1}{2} d^2\mathrm{x},\ \mathrm{U} > \\
&= < d\mathrm{x}, \mathrm{U} > + < \tfrac{1}{2} d^2\mathrm{x},\ \mathrm{U} > \\
&= 0 + \tfrac{1}{2} < d^2\mathrm{x},\ \mathrm{U} > = \tfrac{1}{2} II
\end{aligned}
$$



로 근사 될 수 있다. du**와** dv**의 함수**

$$
\begin{aligned}
\delta(du,dv) &= \tfrac{1}{2}(L du^2 + 2M\,du\,dv + N dv^2) \\
&= \tfrac{1}{2} dv^2 \left(L \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + 2M \left(\frac{du}{dv} \right) + N \right) \quad (dv \neq 0 \text{의 경우}) \\
&= \tfrac{1}{2} du^2 \left(N \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + 2M \left(\frac{dv}{du} \right) + L \right) \quad (du \neq 0 \text{의 경우})
\end{aligned}
$$

의 부호는 판별식 $D = M^2 - LN$ **의 조건에 따라서**

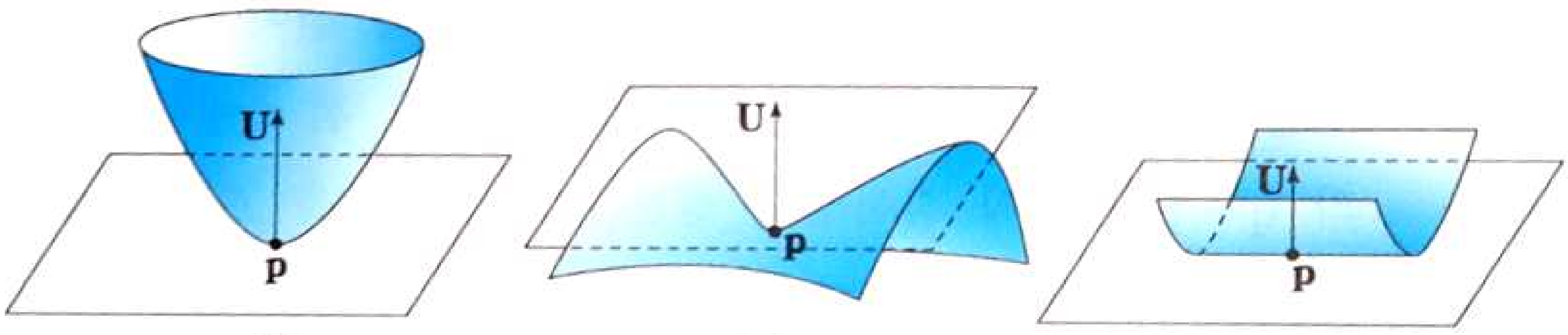
(1) $D<0$**이면** δ**가 방향**(du/dv)**에 관계없이 항상 양수이거나 또는 항상 음수가 되어, 곡면은 타원적 포물면.**

(2) $D>0$**이면** δ**가** 0**이 되는 두 방향**(du/dv)**이 있고 나머지 방향에서는 양과 음의 영역이 교대로 나타나므로, 곡면은 쌍곡적 포물면.**

(3) $D=0$**이면**

(a) L, M, N**이 동시에** 0**이 아니라면** d**가** 0**이 되는 한 방향**(du/dv)**이 있고, 나머지 방향은 모두 한 부호가 되어, 곡면은 포물 주면.**

(b) L, M, N**이 동시에** 0**이 되면 모든 방향에서** δ**가** 0**이 되어 평면.**



(1) (2) (3)

[예제] 윤환면위의 점을 타원점, 쌍곡점, 포물점, 평탄점으로 분류하여라.

(풀이) $0 < r < R$

$$\mathrm{x}(u,v) = ((R + r\cos(u))\cos(v),\ (R + r\cos(u))\sin(v),\ r\sin(u))$$

에서

$$\mathrm{x}_u = (-r\sin(u)\cos(v),\ -r\sin(u)\sin(v), r\cos(u))$$

$$\mathrm{x}_v = (-(R + r\cos(u))\sin(v),\ (R + r\cos(u))\cos(v),\ 0)$$

$$\mathrm{x}_{uu} = (-r\cos(u)\cos(v),\ -r\cos(u)\sin(v), -r\sin(u))$$

$$\mathrm{x}_{uv} = (r\sin(u)\sin(v),\ -r\sin(u)\cos(v), 0)$$

$$\mathrm{x}_{vv} = (-(R + r\cos(u))\cos(v),\ -(R + r\cos(u))\sin(v),\ 0)$$

이므로

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v}{\|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\|} = (-\cos(u)\cos(v),\ -\cos(u)\sin(v), -\sin(u))$$

$$L = r,\ M = 0,\ N = (R + r\cos(u))\cos(u)$$

이 되고, 판별식 D는

$$D = M^2 - LN = -r(R + r\cos(u))\cos(u)$$

이다. 판별식 D에서 $(R + r\cos(u)) > 0$ 이므로 D의 부호는 $-\cos(u)$ 의 부호와 같다. 그러므로

타원점 $\Leftrightarrow\ D < 0\ \Leftrightarrow\ \cos(u) > 0\ \Leftrightarrow\ \dfrac{-\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$

쌍곡점 $\Leftrightarrow\ D > 0\ \Leftrightarrow\ \cos(u) < 0\ \Leftrightarrow\ \dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{3\pi}{2}$

타원점 $\Leftrightarrow\ D = 0\ \Leftrightarrow\ \cos(u) = 0\ \Leftrightarrow\ \dfrac{\pi}{2} = u \text{ or } u = \dfrac{3\pi}{2}$

평탄점 $\Leftrightarrow\ L = M = N = 0\ \Leftrightarrow\ r = 0\ \Leftrightarrow$ **존재하지 않음.** ■

[예제] $f(u) > 0$ **일 때, 회전면**

$$\mathrm{x}(u,v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), u)$$

에서, "모든 점이 포물점" $\Leftrightarrow$ **"$f(u)$가 상수함수 또는 1차함수"**

(풀이)

$$\mathrm{x}_u = (f'(u)\cos(v), f'(u)\sin(v), 1)$$

$$\mathrm{x}_v = (-f(u)\ \sin(v),\ f(u)\cos(v), 0)$$

$$\mathrm{x}_{uu} = (f''(u)\cos(v), f''(u)\sin(v), 0)$$

$$\mathrm{x}_{uv} = (-f'(u)\sin(v), f'(u)\cos(v), 0)$$

$$\mathrm{x}_{vv} = (-f(u)\ \cos(v),\ -f(u)\sin(v), 0)$$

이므로

$$\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v = (-f(u)\cos(v),\ -f(u)\sin(v),\ f(u)f'(u))$$

$$\|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\| = f(u)\sqrt{1 + f'(u)^2}$$

이 되고,

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v}{\|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v\|} = \frac{(-\cos(v),\ -\sin(v),\ f'(u))}{\sqrt{1+f'(u)^2}}$$

$$L = \frac{f''(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}},\ M=0,\ N=\frac{f(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}$$

이므로 판별식은

$$D = M^2 - LN = \frac{f(u)f''(u)}{1+f'(u)^2}$$

이다. $f(u) > 0$ **이므로,**

"모든 점이 포물점" $\Leftrightarrow\ D=0$ **,** $^{\forall}u$

$\Leftrightarrow\ f''(u)=0$**,** $^{\forall}u$

$\Leftrightarrow\ f(u)$**는 상수 함수 또는 1차 다항함수** ■