수학기초론

무한에도 다양한 크기가 있다

한남대학교 수학과
김상배 교수

http://sbk.hnu.kr

집합

합집합, 교집합, 차집합, 전체집합, 여집합, 곱집합

곱집합(product of set)

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$$A^2 = A \times A$$

관계 **(X, Y 사이의 관계 R)**

$$R \subset X \times Y$$

정의역 : $\mathrm{Dom}(R) = \{\, x \mid (x,y) \in R \,\}$

치역 : $\mathrm{Ran}(R) = \{\, y \mid (x,y) \in R\}$

$$(x,y) \in R \iff x \sim y \iff R(x) = y$$

역관계와 합성관계

역관계 $R^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in R \}$

합성관계 $S \circ R = \{ (x,z) \mid (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S \}$

동치관계 R in X

1) **반사율 :** $\forall x \in X, (x,x) \in R$

2) **대칭율 :** $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

3) **전이율 :** $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

순서관계 R in X

1) **반사율 :** $\forall x \in X, (x,x) \in R$

2) **반대칭율 :** $((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R) \Rightarrow x = y$

3) **전이율 :** $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

함수관계

함수 $f: X \to Y$, 정의역, 공변역, 대응규칙

(1) $\forall x \in X,\ \exists y \in Y: f(x) = y$

(2) $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$

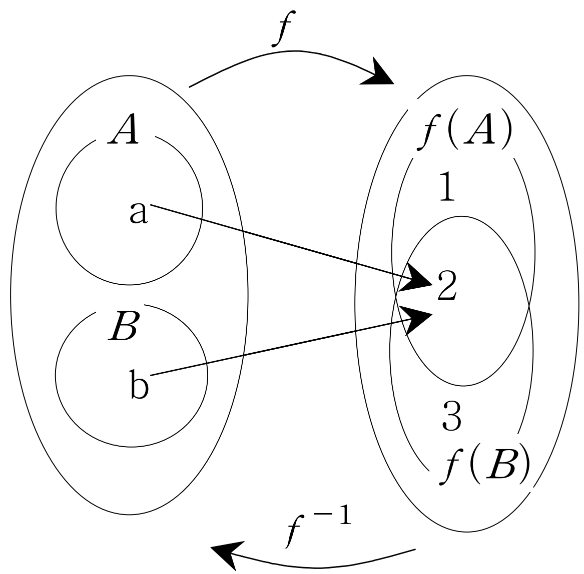
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$



전사함수 : $\forall y \in Y, \exists x \in X: f(x) = y$ **(위로의 함수)**

단사함수 : $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ **(1-1함수)**

f**: 전단사함수(1-1대응함수)** $\Leftrightarrow$ **역함수** f^{-1} **가 존재**

유한집합과 무한집합

유클리드(Euclid)는 "전체는 부분보다 크다"를 공리로 택하였다. 그러나 갈릴레이(Galileo Galilei)는 대응 $n \leftrightarrow 2n$ 을 써서 자연수의 집합과 짝수들의 집합이 대등함을 보여 유클리드의 공리가 무한집합에 대해서는 적용되지 않는 것임을 알았다.

"긴 선분은 짧은 선분보다 많은 점을 포함하지 않는다."는 사실 즉, "한 부분의 전체와 같은 수의 원소로 이루어져있다" 는 생각은 많은 수학자를 괴롭혀왔다. 1888년 독일의 수학자 데데킨트는 위의 생각을 아래와 같은 무한집합의 정의로 해결하였다.

무한집합과 유한집합

자신의 진부분집합과의 사이에 전단사함수가 존재하는 집합을 **무한집합**이라고 한다. 예) 자연수집합, 실수집합

무한집합이 아닌 집합을 **유한집합**이라고 한다.

유한집합과 무한집합의 성질

(a) 무한집합의 모든 초집합은 무한집합이다.

(b) 유한집합의 모든 부분집합은 유한집합이다.

(c) $f: X \to Y$가 전단사함수이고 X가 무한집합이면, Y도 무한집합이다.

(d) $f: X \to Y$가 전단사함수이고 X가 유한집합이면, Y도 유한집합이다.

(e) X가 무한집합이고 Y가 공집합이 아니면, $X \times Y$는 무한집합이다.

(f) X가 무한집합이고 Y가 유한집합이면, $X - Y$는 무한집합이다.

(g) 집합 X가 유한집합일 필요충분조건은, $X = \phi$이거나 X가 적당한 $\{1, 2, 3, \cdots, k\}$와 일대일대응이다.

집합의 대등

두 집합 X, Y은 **대등**(equipotent)하다

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ 두 집합 X, Y 사이에 전단사함수가 존재한다.

자연수에는 기수와 서수로서의 두 속성이 있다. 1, 2, 3, …을 나타내는 수사 one, two, three, … 처럼, 한 집합에서 원소의 순서를 생각하지 않고 그 개수를 세는 데 쓰이는 것이 기수(基數)이고, first, second, third, … 처럼 원소들의 차례를 세는 데 쓰이는 것이 서수(序數)이다.

칸토르는 자연수 전체의 집합 N 의 기수를 $\aleph_0$(aleph null)이라 나타내었는데, 알레프는 히브리 말의 알파벳의 첫 글자이다. N 과 대등한 집합, 즉 $\aleph_0$을 기수로 가지는 집합을 가부번집합(可附番集合)이라 부른다. $\aleph_0$은 최소의 초한기수(무한집합의 기수)이다.

자연수는 수의 확장 단계의 첫 발자국이므로, 모든 수를 엄밀하게 정의하려면 자연수에 관한 확고한 인식이 필요했다. 이것에 눈을 뜬 것은 너무나 늦어서, 페아노의 1895년의 책에서였다.

자연수의 정의 (by 페아노)

이제 그의 자연수의 공리계를 좀 쉽게 설명해 보자. 먼저 “자연수”, “후자”(어떤 자연수의 바로 다음 자연수), “1”을 무정의용어로 잡고 그들 사이에 다음과 같은 5개의 공리를 정한다.

(1) 1은 한 자연수이다.

(2) 임의의 자연수 x에 대하여 그 후자 x'이 유일하게 정해진다.

(3) 어떤 자연수 x에 대하여도, $x' \neq 1$이다.

(4) $x' = y'$이면 $x = y$이다.

(5) 어떤 자연수들의 집합 M이 있어, $1 \in M$ 이고, ($x \in M \Rightarrow x' \in M$) 이면, M은 모든 자연수를 포함한다.

자연수의 구성 (폰노이만)

각 자연수는 그보다 작은 자연수들의 집합이다. 예를 들어, 처음 몇 자연수는 다음과 같다.

$$0 = \phi$$

$$1 = \{0\}$$

$$2 = \{0,1\}$$

$$3 = \{0,1,2\}$$

$$\cdots$$

가부번집합(denumerable set)

자연수의 집합 $\mathbb{N}$과 대등한 집합

가산집합 (countable set)

유한집합 또는 가부번집합

비가산집합 (uncountable set)

가산집합이 아닌 집합 (즉 유한집합도 아니고, 가부번집합도 아니다)

이제 어떤 집합이 가부번인가 생각해 보자. 한 집합 X가 가부번이 되기 위해서는 그 집합의 원들을 무한열 $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ 와 같이 나타낼 수 있어야 한다.

가부번집합과 가산집합의 성질

(a) 가부번집합의 무한부분집합은 가부번집합이다.

(b) X가 가부번집합이고 $x \in X$이면 $X-\{x\}$ 도 가부번집합이다.

(c) 가산집합의 부분집합은 가산집합이다.

(d) X가 가부번집합이고 Y가 유한집합이면 $X \cup Y$는 가부번집합이다.

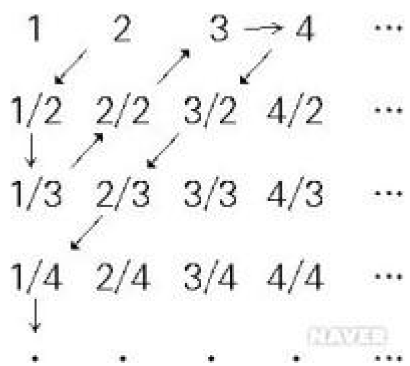
(e) X, Y가 가부번집합이면 $X \cup Y$는 가부번집합이다.

[정리] "정수 전체의 집합 Z 는 가부번이다."

(증명) $Z=\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \cdots\}$와 같이 나타낼 수 있기 때문이다. 따라서 $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$임을 알 수 있다.

[정리] "유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}$ 는 가부번이다."

(증명) 양의 유리수 전체를 다음과 같이 배열한다.



이것에서 화살표 방향의 순서대로 열을 만들면, 양의 유리수 전체는

$$\left\{1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ 3,\ 4, \cdots\right\}$$

로 나열할 수 있고, 여기에서 중복되는 것은 빼도 된다. 따라서 양의 유리수 전체는 자연수 집합 $\mathbb{N}$ 과 대등함을 안다. 유리수 전체는 정수 경우와 같이 역시 가부번이 됨을 알 수 있다. ■

[정리] "가부번집합들의 가부번 개의 합집합도 역시 가부번이다."

[정리] "실수 집합 $\mathbb{R}$ 은 가부번이 아니다" (대각선논법)

(증명) 개구간 $(0,1)$에 속하는 모든 수는 $0.x_1x_2x_3\cdots$ 와 같은 무한소수로 나타낼 수 있다. 만약 $(0,1)$이 가부번이라면

$$(0,1)=\{a_1,a_2,a_3,\ \cdots\}$$

와 같이 수열로 나타낼 수 있다면

$$a_1 = 0.\,a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$

$$a_2 = 0.\,a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$

$$a_3 = 0.\,a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

에서 모든 i에 대하여 $b_i=\begin{cases}0 & \text{if } a_{ii}\neq 0\\ 1 & \text{if } a_{ii}=0\end{cases}$ 로 만든 실수

$b=0.b_1b_2b_3\cdots$은 구간$(0,1)$에 속하지만 각 i에 대하여 $b\neq a_i$이다.

그러므로 구간 $(0,1)$은 가부번이 아니다. ■

연속체가설

실수 전체의 기수를 $\aleph$로 나타내고, 이를 연속체기수라 부르기로 하면, $\aleph_0 < \aleph$이다. 칸토르는 $\aleph$가 $\aleph_0$다음으로 큰 초한수이다, 즉 "$\aleph$와 $\aleph_0$ 사이에 다른 초한기수가 없다" 라고 추측하였으나, 이를 증명할 수는 없었다. 이것을 **연속체가설**이라 부른다.

[정리] "직선과 평면은 점집합으로써 대등하다"

(증명) 직선 위의 점은 실수이고, 평면 위의 점은 실수의 순서쌍이다. 이제, 한 실수를 소수로 나타내어 홀수 자리와 짝수 자리로 갈라서, 예를 들어, $34567.23430781\cdots \leftrightarrow (357.2408\cdots, 46.3371\cdots)$ 로 대응시키면, 직선 위의 점들과 평면 위의 점들 사이에 1대1 대응이 얻어진다 ■

[정리] "모든 유클리드공간 R^n의 기수는 $\aleph_0$이다"

멱집합

어떤 집합 X의 모든 부분집합들의 집합을 X의 멱집합이라 부르고 $P(X)$ 또는 2^X 로 나타낸다. 즉

$$P(X) = 2^X = \{ A \mid A \subset X \}$$

공집합 ϕ 와 X자신은 X의 부분집합이므로, $\phi \in P(X)$, $X \in P(X)$ 이다. 실수 집합 R은 자연수 집합의 멱집합 $P(\mathrm{N})$과 대등함이 알려져 있다. 칸토르는 다음과 같은 중요한 사실을 증명하였다.

n개의 원소로 된 집합의 멱집합은 2^n개의 원소로 되어 있다. 즉 $n < 2^n$ 이다. $n = 0$일 때 즉 공집합 ϕ은 자기 자신 단 한 개만의 부분집합을 가지므로, 그 멱집합의 기수는 $2^0 = 1$이 되어, 위의 결과와 일치한다.

[정리] "어떤 집합 X의 멱집합 $P(X)$의 기수는 X의 기수보다 크다"

(증명) 만약 X와 $P(X)$의 기수가 같다면, $x \leftrightarrow A(x)$로 1-1 대응을 이루는데, $P(X)$와 X를 행과 열로 배치하여 보자.

$$X = \{a, b, c, \cdots\cdots, n, \cdots\}$$

$$\begin{aligned} P(X) = \{\ & A(a) = \{\boxed{}, b, c, \cdots\cdots, \ , \cdots\} \\ & A(b) = \{a, \boxed{b}, c, \cdots\cdots, n, \cdots\} \\ & \quad \vdots \\ & A(n) = \{a, b, c, \cdots\cdots, \boxed{}, \cdots\} \\ & \quad \vdots \\ \} & \end{aligned}$$

여기서 대각선이 비어 있는, 즉, $A(x)$가 원소 x를 포함하지 않은 원소 x들만 모아서 X의 부분집합 $B = \{\boxed{a}, \boxed{}, \cdots\cdots, \boxed{n}, \cdots\}$을 만들면 B는 위 나열된 집합 $A(x)$들과 다른 새로운 부분집합이다.

그러므로 $P(X)$는 X와 1-1 대응이 안 되어 기수가 다르다. ■

위에서 밝힌 바 있다.
가장 큰 초한기수는 없다

모든 초한기수보다 큰 어떤 초한기수(기수도 일종의 집합임) X가 있다

"일반"연속체가설

어떤 초한기수 $\aleph_\alpha$에 대해서, $\aleph_\alpha$와 $2^{\aleph_\alpha}$ 사이에 다른 초한기수는 없다
만일, 위 정리에 의하면, 집합 X의 멱집합 $P(X)$는 X보다 큰 초한기수를 갖는다"

여기에서 $\alpha = 0$인 경우가 그냥 연속체가설이다.

$P(X)$ 보다 크지 못하여, 모든 초한기수보다 클 수가 없다.

초한기수는 모두 $\aleph_\alpha$꼴로 쓸 수 있는데, 기수가 $\aleph_\alpha$인 집합의 멱집합의 기수를 $2^{\aleph_\alpha}$로 나타낸다. 따라서 $\aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$이다. 한편 $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$임은

즉, 두 집합 A, B의 기수가 $|A| \leq |B|$이고,$|B| \leq |A|$이라면, $|A| = |B|$이다.

준)와 유사하다는 것이다. 그러므로 일반연속체 가설과 유클리드 기하학에서의 평행선 공리를 우리가 받아들이거나 부정해도 수학의 이론상 하등의 모순이 일어나지 않는다고 주장할 수 있다.

칸토어-번슈타인 정리

두 집합 A, B 사이에 단사 함수 $f: A \to B$와 $g: B \to A$가 존재하면, 전단사 함수 $h: A \to B$가 존재한다.

위에서 밝힌 바 있다.

"일반"연속체가설

"어떤 초한기수 $\aleph_\alpha$에 대하여, $\aleph_\alpha$와 $2^{\aleph_\alpha}$사이에 다른 초한기수는 없다"
여기에서 $\alpha=0$인 경우가 그냥 연속체가설이다.
이 문제를 놓고 칸토어를 비롯하여 탁월한 수학자들이 많은 노력을 기울였으나 모두 허사로 끝나고 말았다. 고전수학의 어디에도 그와 같은 집합이 전혀 발견되지 않았을 뿐만 아니라 발견할 수 있는 방법조차 있을 것 같지 않았으므로 칸토어와 그 밖의 다른 수학자들은 이 연속체 문제에 대한 답은 부정적일 것이라고 예측하였다.

그러나 논리학자 쿠르트 괴델이 1938년 비로소 그 증명을 마쳤다. 사실 괴델은 이 가설을 다음과 같은 관점에서 증명하였다. 일반연속체 가설

은 집합론의 공리들과 상대적으로 모순되지 않는다.

그리고 1963년 미국 스탠퍼드 대학의 젊은 수학자 폴 코헨에 의하여 뜻깊은 진전을 보기에 이르렀다. 그는 현행 집합론 공리계의 기초 위에서는 일반연속체 가설의 증명이 불가능하다고 주장하였다. 다시 말하면 일반연속체 가설의 성격은 유클리드 기하학에서의 평행선 공리(제5공준)와 유사하다는 것이다. 그러므로 일반연속체 가설과 유클리드 기하학에서의 평행선 공리를 우리가 받아들이거나 부정해도 수학의 이론상 하등의 모순이 일어나지 않는다고 주장할 수 있다.

칸토어-번슈타인 정리

두 집합 A,B 사이에 단사 함수 $f:A\to B$와 $g:B\to A$가 존재하면, 전단사 함수 $h:A\to B$가 존재한다.

즉, 두 집합 A, B의 기수가 $|A| \le |B|$이고,$|B| \le |A|$이라면, $|A| = |B|$이다.

정렬집합

모든 부분집합이 최소원소를 가진 집합

전순서집합

임의의 서로 다른 두 원소 x, y에 대하여, $x < y$ or $y < x$ 되는 집합.

순서수의 정의

순서수(順序數, ordinal) 또는 서수(序數)는 정렬 전순서 집합들의 크기를 측정하는 수의 일종이다. 자연수를 확장하며, 자연수들의 정렬 전순서

집합과 같은 무한 정렬 전순서 집합들의 크기를 측정하는 무한 순서수들이 존재한다.

자연수는 집합의 크기를 표현하기 위해 사용되기도 하고, 열에서 원소의 위치를 나타내기 위해 사용되기도 한다. 이 두 쓰임새는 유한 집합의 경우 크게 다르지 않으나, 무한 집합의 경우에는 이 구분이 중요해진다. 전자를 확장한 것이 기수이고, 후자를 확장한 것이 순서수이다.

기수는 아무런 구조도 갖지 않는 집합에 대해서도 부여할 수 있지만, 순서수는 정렬 전순서 집합에 대해서만 정의한다.

순서수의 예

유한 순서수들은 자연수(음이 아닌 정수)들과 대응된다.

가장 작은 무한 순서수 ω는 자연수 집합 전체의 순서형이며, 폰 노이만 정의에서는 이는 자연수의 집합(집합내의 자연수들 사이에 순서 구조를 를 가진 집합)과 같다.

$$\omega = \mathrm{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

그 다음은

$$\omega+1=\{0,1,2,\cdots,\omega\}$$

$$\omega+2=\{0,1,2,\cdots,\omega,\omega+1\}$$

마친가지로 $\omega+\omega=\omega\cdot 2$ **는 다음과 같다. (주의 :** $\omega\cdot 2\neq 2\cdot\omega$**)**

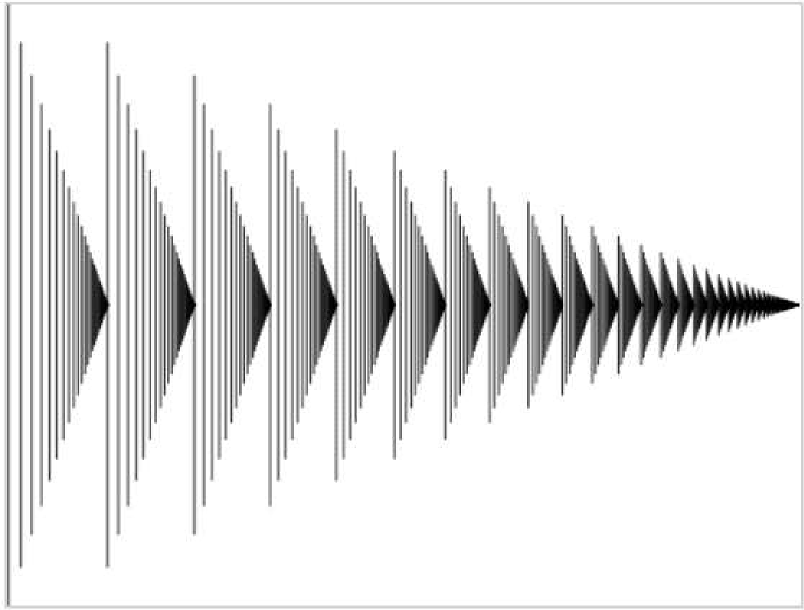
$$\omega\cdot 2=\{0,1,2,\cdots,\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots\}$$

$$\omega\cdot 2+1=\{0,1,2,\cdots,\ \omega,\ \omega+1,\omega+2,\ \cdots\ ,\omega\cdot 2\}$$

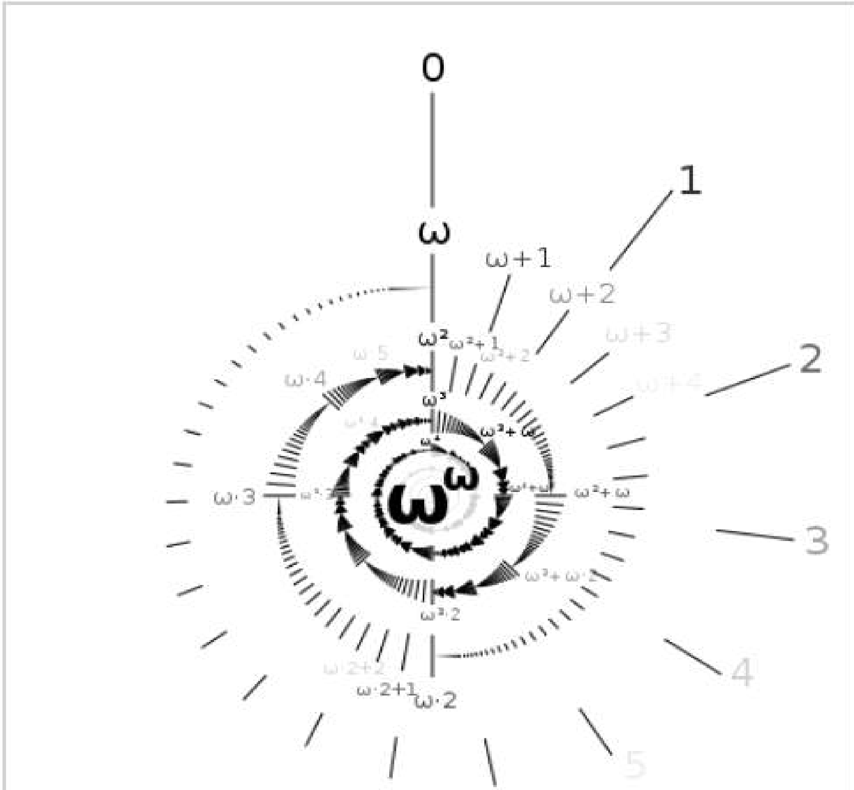
다음으로

$\omega^2=\{\ \omega\cdot m+n\ \mid\ m\in\mathrm{N},\ \ n\in\mathrm{N}\ \}$**,** $\quad\omega^2,\omega^3,\cdots$

이것들의 극한은 ω^ω **이고**



순서수 ω^2 의 형상화. ω개의 ω들이 모여 있다.



ω^{ω} 이하의 순서수들의 형상화

더 나아가서 $\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}} = \varepsilon_0$ 이라고 하면 $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$ 라고 한다. 이보다 더 큰 가산 무한서수들의 많은 층이 있다. 그런데 기수에서는 $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ 이지만, 서수에서는 $2^{\omega} = \omega$ 가 된다고 한다.

비가산 무한순서수

(모든 가산 무한 순서수들)의 집합의 순서형은, 대각선 논법을 사용하면, 어느 가산 무한 순서수와도 1-1대응이 되지 않아서, 가장 작은 비가산 무한 순서수 ω_1가 된다. 집합 ω_1의 기수는 가장 작은 비가산 무한 기수 $\aleph_1$과 같다.

가장 큰 무한순서수는 없다

모든 순서수의 모임이 집합이라고 하면 그것을 On이라고 표시하면, 다시 On보다 큰 $On+1 = On \cup \{On\}$이 존재하여 $On+1$은 모든 순서

의 모임인 On에 포함되어, $On < On+1 < On$ 이 되어 모순이 된다. 따라서 모든 순서수들의 집합은 없다.

극한순서수

$\beta+1=\alpha$ 를 만족하는 순서수 β가 존재하지 않는 순서수 α를 극한순서수라고 한다. (예 : $\omega, \omega 2$ 등)

따름순서수

$\beta+1=\alpha$ 를 만족하는 순서수 β가 존재하는 순서수 α를 따름순서수라고 한다 (예 : $\omega+1$)