진법과 전자계산의 원리

한남대학교 수학과
김상배 교수

http://sbk.hnu.kr

진법이란

컴퓨터는 전기의 on 과 off 에 의하여 숫자를 표현하고 계산한다.

전자계산의 원리를 이해하려면, 2진법을 (혹은 n진법)을 이해할 필요가 있다.

수의 표시

1부터 시작하여 순서대로 무한이 늘어 서 있는 자연수는 꼭 10진법으로 이름을 부여할 필요는 없다. 자연수들에 이름을 주는 방법은 무수히 많다.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 (10진법)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F 10 11 12 13 (16진법)

I II III IV V VI VII VIII IX X XI XII XIII XIV XV XVI XVII XVIII XIX XX

n진법(n개의 기호로 숫자를 표시하는 방법)

4진법(4개의 기호로 숫자를 표시)

A B C AD AA AB AC BD BA BB BC CD CA CB CC CDD

1 2 3 10 11 12 13 20 21 22 23 30 31 32 33 100

2진법 (2개의 기호로 숫자 표시)

1자리 0, 1 (자연수 2개 표시가능)

2자리 00, 01, 10, 11 (자연수 4개 표시가능)

3자리 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 (자연수 8개 표시가능)

. . . . .

자리수를 늘리면 0과 1만으로도 모든 자연수에 이름을 줄 수 있다.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, . . . (10진법)

0, 1,10,11,100,101, 110, 111, 1000, . . . (2진법)

노트에 필기하다보면 2진법이 자리를 많이 차지 한 것 같지만, 컴퓨터 기억장치에는 어차피 전기적 on 과 off 상태를 저장하기 때문에 결국 10진법도 두 가지 상태로 분해하여 저장하니 2진법이나 마찬가지이다.

컴퓨터의 숫자 표시

컴퓨터는 모든 10진법의 숫자를 2진법으로 표시하여 저장하고 계산한다.

사람에게 보여줄 때만 10진법으로 다시 바꾸어 보여 준다.

2진법 셈하기

덧셈, 뺄셈, 곱셉, 나눗셈의 기초는 덧셈이다.

2진법 덧셈하기

$$(0)_2+(0)_2=(0)_2$$

$$(0)_2+(1)_2=(1)_2$$

$$(1)_2+(0)_2=(1)_2$$

$$(1)_2+(1)_2=(10)_2$$

$$(10)_2+(1)_2=(11)_2$$

$$(10)_2+(10)_2=(100)_2$$

$$(11)_2+(10)_2=(101)_2$$

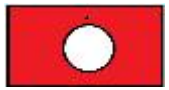
$$(11)_2+(11)_2=(110)_2$$

논리계산과 진리표

모든 논리는 3가지 (NOT, AND, OR) 연산만으로 표시될 수 있다.

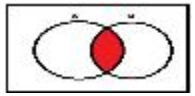
NOT 진리표

A	$\overline{A}$
0	1
1	0



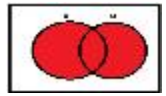
AND 진리표

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



OR 진리표

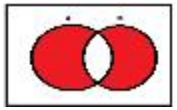
A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



논리계산으로 2진법 덧셈 가능

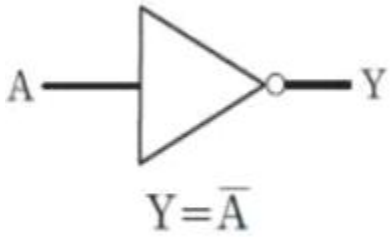
$$C = A \wedge B \qquad S = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B) = A \oplus B$$

: 배타적논리합 ExclusiveOR XOR

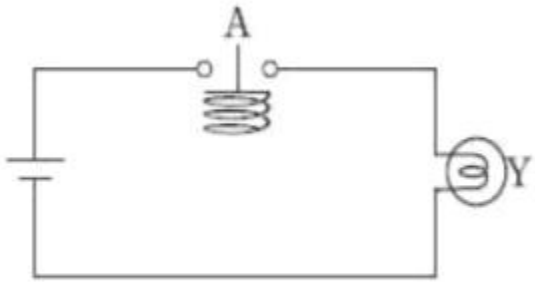


A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \wedge \overline{B}$	$\overline{A} \wedge B$	C	S	$A+B$
0	0	1	1	0	0	0	0	00
0	1	1	0	0	1	0	1	01
1	0	0	1	1	0	0	1	01
1	1	0	0	0	0	1	0	10

논리회로(NOT 스위치)



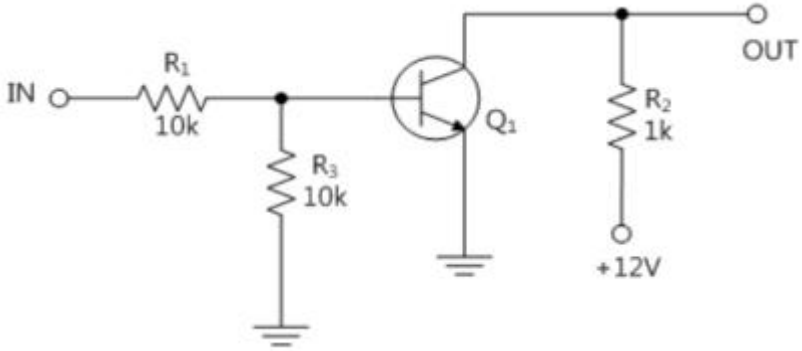
(a) 기호와 논리식



(b) 스위치 회로

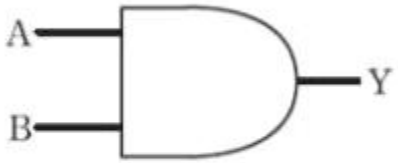
A	Y
0	1
1	0

(c) 진리표



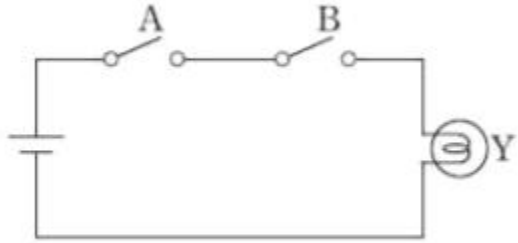
(d) 트랜지스터 회로

논리회로(AND 스위치)



$Y = A \cdot B$

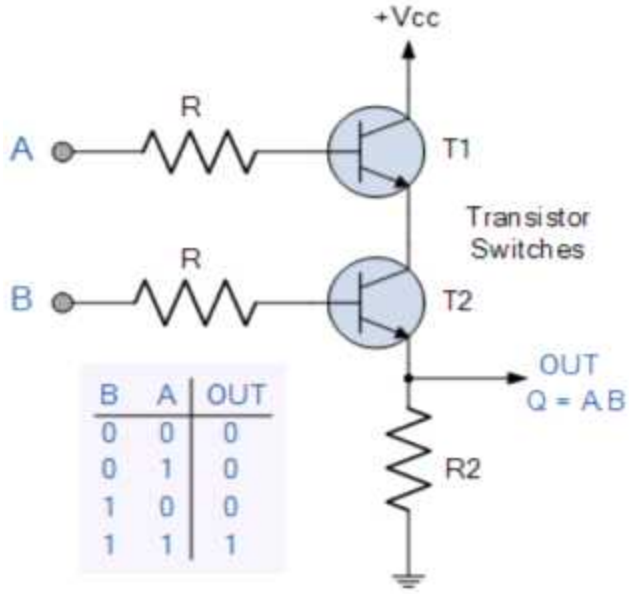
(a) 기호와 논리식



(b) 스위치 회로

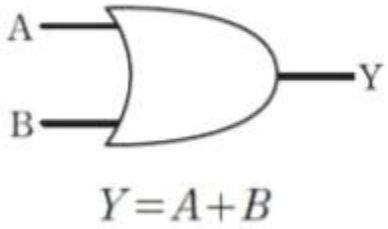
A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(c) 진리표



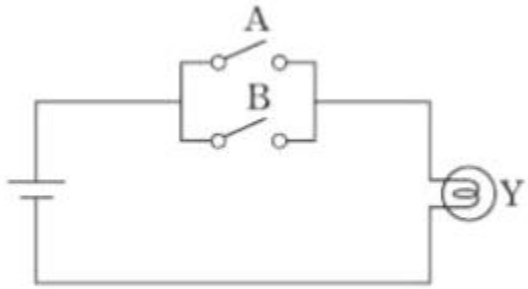
(d) 트랜지스터 회로

논리회로(OR 스위치)



$Y = A + B$

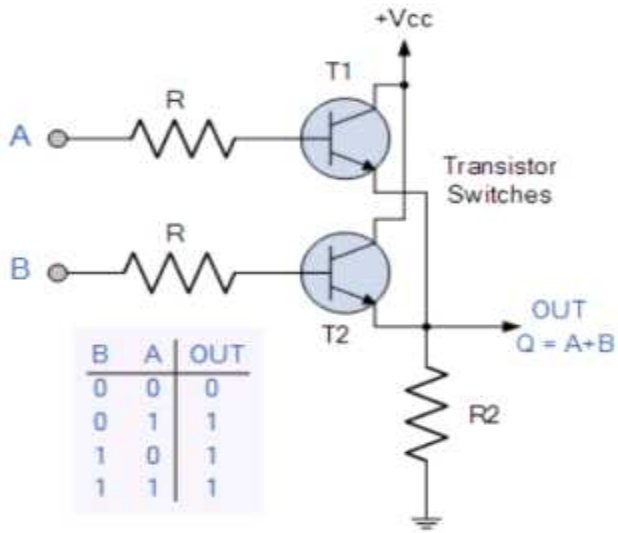
(a) 기호와 논리식



(b) 스위치 회로

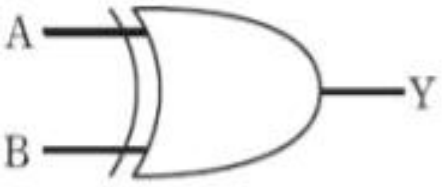
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(c) 진리표



(d) 트랜지스터 회로

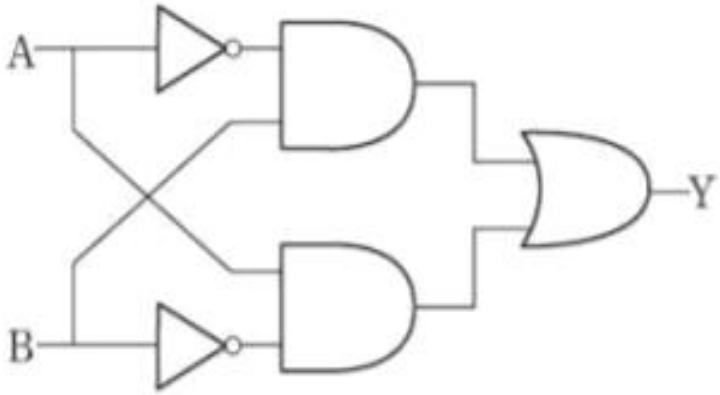
논리회로 (XOR 스위치 : $Y = A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$)



$Y = A \oplus B$

또는 $Y = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$

(a) 기호와 논리식



(b) 개념도

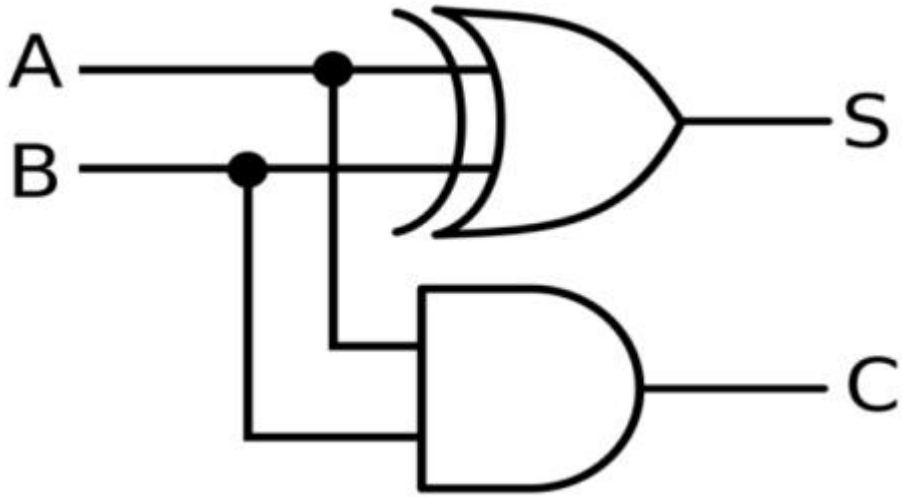
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

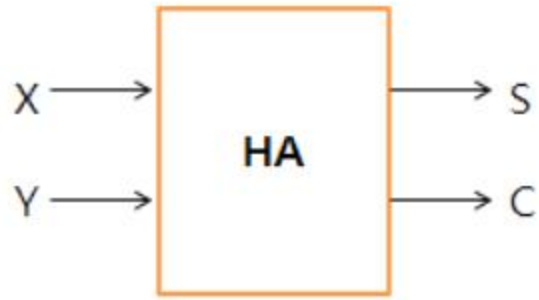
(c) 진리표

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A\overline{B}$	$\overline{A}B$	$Y = A\overline{B} + \overline{A}B$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0

논리회로 시뮬레이션 : https://javalab.org/logic/

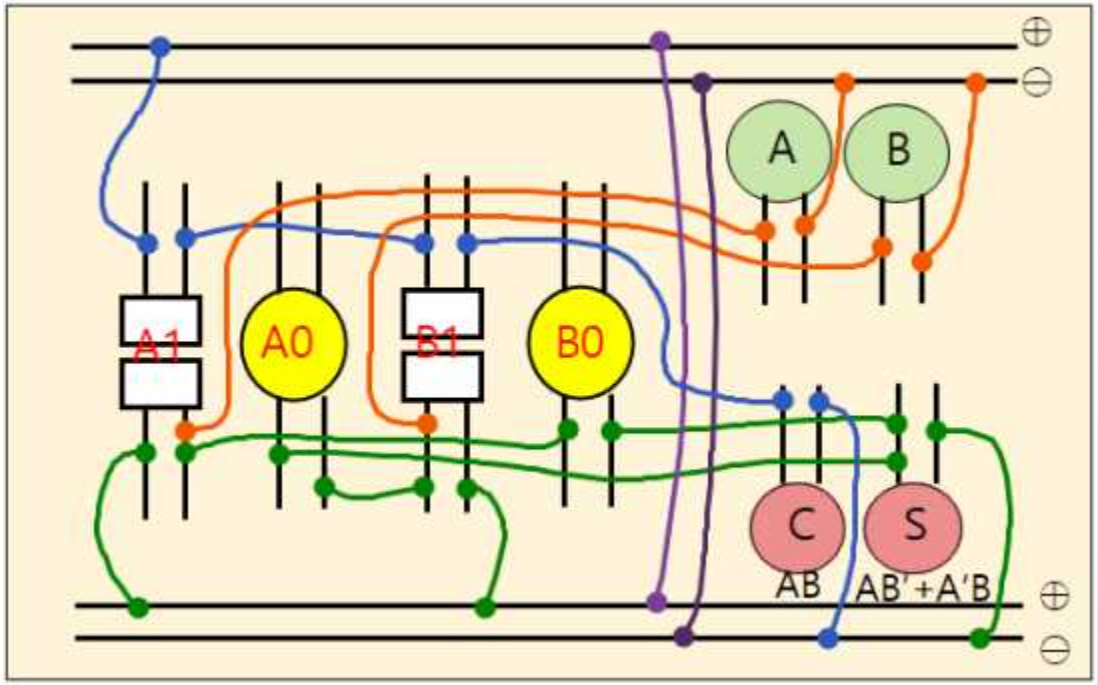
논리게이트로 구현하는 반가산기

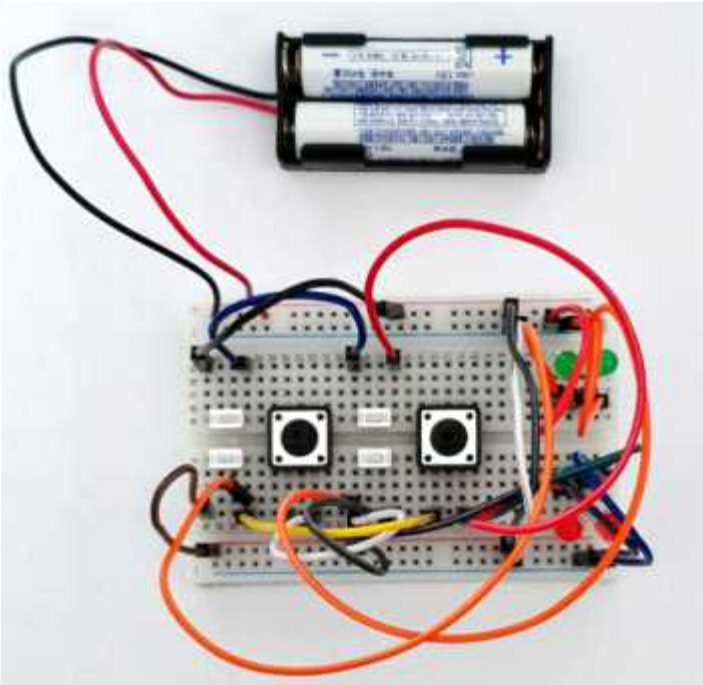




A	B	C = AB	S = A⊕B	CS
0	0	0	0	00
0	1	0	1	01
1	0	0	1	01
1	1	1	0	10

스위치로 만드는 반가산기

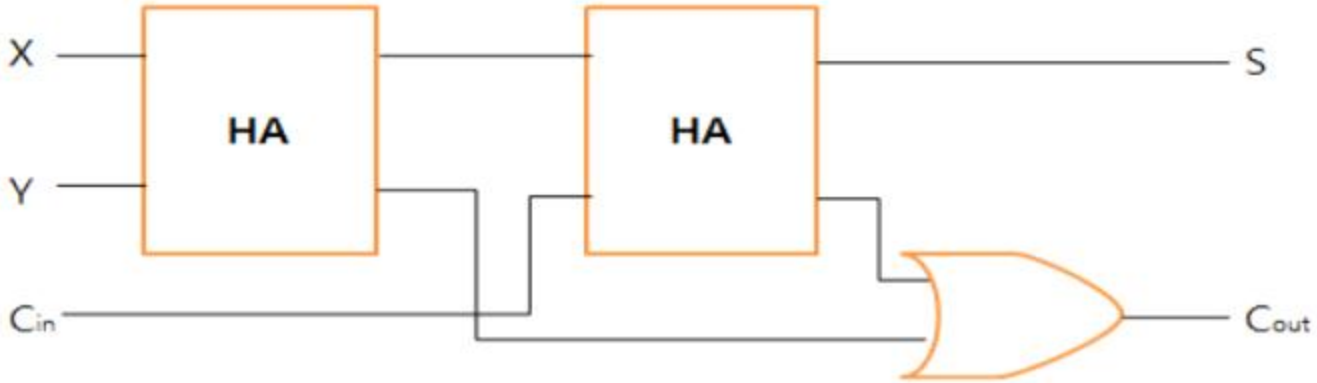




A	B	CS
0	0	00
0	1	01
1	0	01
1	1	10

전가산기 (반가산기 2개를 이용)

아래 자리수에 올라온 C_{in} 까지 더하여 $X+Y+C_{in}$ 을 수행한다.

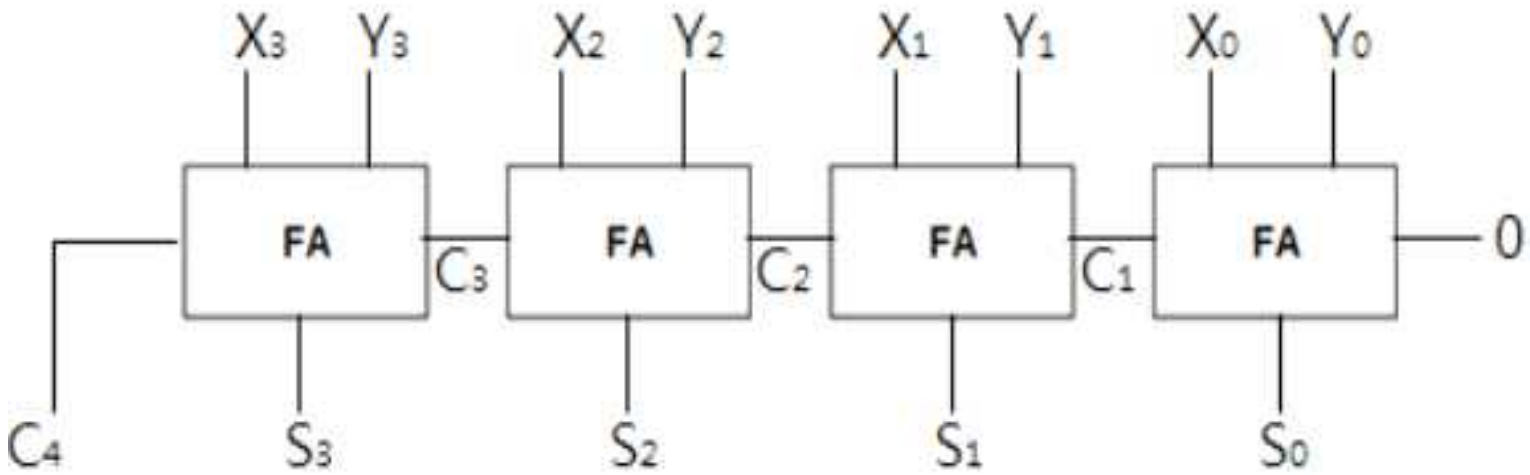


입력			출력	
X	Y	C_{in}	S	C_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

참고: 첫째 HA에서 둘째 자릿수가 C=1 이면 첫째 자리수가 S=0 이 되므로 둘째 HA에서는 둘째 자릿수 C=1 이 나올 수가 없어서, Cout 는 1+1 이 되어 셋째 자릿수로 올라가는 일은 없다.

병렬가산기(전가산기 n개 연결)

전가산기 여러개를 병렬로 연결하면 n비트 가산기를 만들 수 있다. 아래 예는 4비트 가산기인데, 4비트의 2진수 $X_3X_2X_1X_0$와 $Y_3Y_2Y_1Y_0$를 합한 결과는 2진수 $S_3S_2S_1S_0$이며, 최종 윗자리수로 올라가는 수는 C_4이다.



10의 보수를 이용한 십진법의 뺄셈

예) $8-6=8+(4-10)=(8+4)-10=12-10=2$

예) $2-4=2+(6-10)=(2+6)-10=8-10=-2$

2의 보수의 정의

주어진 이진수 X 의 모든 자리의 숫자를 반전(0을 1로, 1을 0으로)시킨 뒤 여기에 1을 더하면 2의보수(X 에 더하면 올려진 첫자리를 제외한 모든 비트가 0 이 되는 수)를 얻는다. 예를 들어,

01001011 의 모든 자리의 수를 반전시키고 마지막에 1을 더하면 2의보수 10110101 를 얻는데 이 수에 원래의 수를 더해 보면

$$\begin{array}{rl} & 01001011\ (=75_{(10)}) \\ +) & 10110101\ (=-75_{(10)}) \\ \hline & 100000000\ (=256_{(10)}=2^8{}_{(10)}) \end{array}$$

: 2의 제곱수가 된다.

즉 올림수 1을 제외한 나머지 자리가 모두 0이다.

2의보수를 이용한 뺄셈

$100-75=100+(-75)=25$ 인데,

$$
\begin{array}{rll}
 & 01100100 & (=100_{(10)}) \\
+) & 10110101 & (=-75_{(10)}) \\
\hline
 & 100011001 & \text{--> 올림수 첫자리를 버리고 나머지를 취한다.} \\
 & 00011001 & (=25_{(10)})
\end{array}
$$

$50-75=50+(-75)=-25$ 인데,

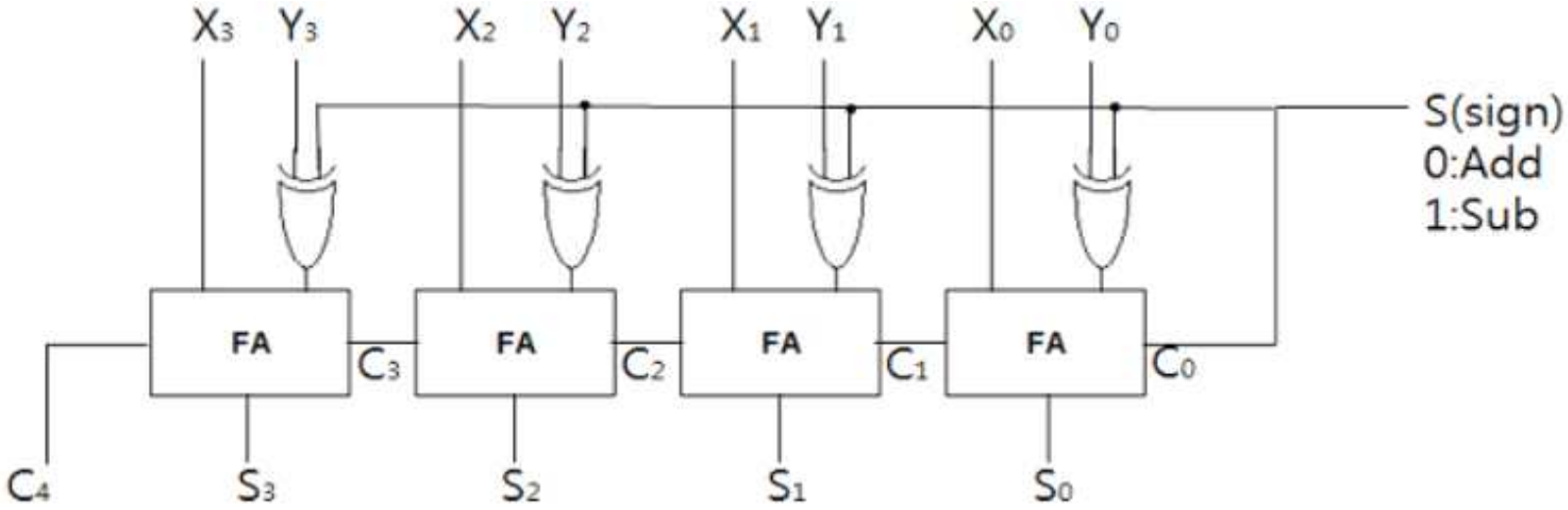
$$
\begin{array}{rll}
 & 00110010 & (=50_{(10)}) \\
+) & 10110101 & (=-75_{(10)}) \\
\hline
 & 11100111 & (=231_{(10)}=256_{(10)}-25_{(10)}=2^8{}_{(10)}-25_{(10)}) \\
 & & \text{올림수가 없으므로 2의보수를 구하고 (-)부호를 붙인다.} \\
- & 00011001 & (=-25_{(10)})
\end{array}
$$

병렬 가감산기(덧셈과 뺄셈 가능)

2진법의 보수를 사용하면 가산기를 사용하여 뺄셈 연산을 할 수 있다

① 감수 Y의 각 비트를 반전한 1의보수를 구하고 마지막 비트에 1을 더하여 2의보수(Y와 더하면 첫 자리 외의 모든 비트가 0이 되는 수)를 구한다.

② 피감수 X와 감수 Y의 2의보수를 더한다.



A	B	A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

③ 올림수 C_4가 0이 아니면 버리고, 나머지 자리의 값($S_3S_2S_1S_0$)을 취한다.

④ 올림수 C_4가 0이면 $S_3S_2S_1S_0$에 대한 2의보수를 구하여 (-)부호를 붙인다.

실제로는, 2의보수를 구하지 않고, $C_4S_3S_2S_1S_0$ 자체를 음수로 간주한다.